מועד ב' סמסטר ב' תשע"ח
17.09.18

<u>בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים</u>

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בארבעת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N,100\}$.
נמקו את תשובותיכם !
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

<u>שאלה 1</u> (45 נקודות)
מבצעים סדרה אין סופית של הטלות בלתי תלויות של קוביה שנופלת על כל פאה בסיכוי שווה. על פאה אחת של הקוביה כתוב 2 ועל חמש מפאותיה כתוב 3. יהי S_n הסכום המצטבר ב n ההטלות הראשונות. יהי Z_n שארית החלוקה של S_n ב 3.
כך למשל אם בארבעת ההטלות הראשונות מתקבלות התוצאות 3,2,2,3 אז $S_4 = 3 + 2 + 2 + 3$, וכך למשל אם $S_n = 12$ אז $Z_n = 0$ ואם $S_n = 14$ אז $Z_n = 2$.
נסתכל על שרשרת מרקוב $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעלת מרחב המצבים $\{0,1,2\}$.

<u>א</u>. מהו $\lim_{n\to\infty} P(Z_n = 2)$?

<u>ב</u>. מהי תוחלת מספר ההטלות עד שהתהליך $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ יגיע למצב 2 ?

<u>ג</u>. האם התהליך $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב ?

<u>ד</u>. מהי בקירוב ההסתברות שיהיה קיים n כך ש $S_n = 1001$ אך לא יהיה קיים n כך ש $S_n = 1000$?

<u>ה</u>. מהי בקירוב ההסתברות שיהיה קיים n כך ש $S_n = 1001$ וגם יהיה קיים n כך ש $S_n = 2001$, אך לא יהיה קיים n כך ש $S_n = 1000$ וגם לא יהיה קיים n כך ש $S_n = 2000$?

שאלה 2 (27 נקודות)
יהיו i,j שני מצבים בשרשרת מרקוב.
הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את כל אחת משלושת הטענות הבאות:

א. אם j מצב מחזורי ונשנה, אז לא קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} P_{j,j}{}^{(n)}$.
ב. אם i מצב נשנה, אז לא יתכן שקיימים שלושה גבולות חלקיים שונים לסדרה $\left\{P_{i,j}{}^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$.
ג. אם i מצב חולף, אז לא יתכן שקיימים שלושה גבולות חלקיים שונים לסדרה $\left\{P_{i,j}{}^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

שאלה 3 (18 נקודות)
באי מסוים נתונה אוכלוסיה של פרטים. כל אחד מהפרטים חי זמן שמתפלג $exp(1)$.
לאחר מותו הוא משאיר אחריו שני צאצאים בסיכוי p או אף לא צאצא אחד בסיכוי $1-p$, וזאת באופן ב"ת בפרטים האחרים. יהי $X(t)$ גודל האוכלוסיה בזמן t. נניח ש $X(0)=2$.

א. מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך שבהסתברות 1 יגיע זמן שבו לא יהיו בכלל פרטים באי.
ב. האם תשובתכם לסעיף א' תשתנה אם נניח שכל פרט חי זמן שמתפלג $U(1,2)$ במקום $exp(1)$?

שאלה 4 (18 נקודות)
תהי $X(t)$ שרשרת מרקוב בזמן רציף בעלת קבוצת המצבים $\{1,2\}$, בעלת מצב התחלתי 1 ויוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

יהיו $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת זמני הקפיצות של התהליך.

א. מהו $P(X(t_4+1)=1)$?
ב. האם מתקיים $\mathrm{P}(X(t_4+1)=1|X(t_3+1)=1)=P_{1,1}(1)$?
