פתרון לבחינה מ 27/09/17

שאלה 1

א. זהו הילוך מקרי על גרף קשיר. הדרגה של צומת 1 היא 1. סכום הדרגות הוא $1+7\cdot 2+1=16$.
לכן ההסתברות הסטציונרית של מצב 1 היא $\frac{1}{16}$, ותוחלת זמן החזרה אליו היא 16.

הערה
בניגוד להילוך מקרי על כל הישר, כאן לא מתקיים $e_{3,1}=2e_{2,1}$.

זו שרשרת סופית ובלתי פריקה, ולכן תוחלת מספר הצעדים עד חזרה למצב היא סופית.

ב. ההילוך המדובר הוא שרשרת מרקוב נשנית חיובית ומחזורית. לכן לא קיים הגבול
(כדי לחזור למצב 1, צריך לעבור על כל צלע מספר זוגי של פעמים, לכן ניתן לבקר במצב 1 רק בזמנים זוגיים).

שאלה 2

א. הגבול הוא 1. אם נקלטים במצב 0, אז החל מרגע הקליטה במצב 0 יתקיים תמיד $\left(Y_{n+1}=Y_n=0\right)$. אם לא נקלטים במצב 0, אז שואפים לאין סוף. תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט היא $\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}$.

מספרי הצאצאים של פרטים שונים הם בלתי תלויים. לפי החוק החלש, ההסתברות שממוצע מספר הצאצאים של פרטים שמספרם שואף לאין סוף, יסטה מהתוחלת ביותר מקבוע חיובי נתון, שואפת לאפס. לכן למשל, ההסתברות שיתקיים $\left(Y_{n+1}<1.1Y_n\right)$ שואפת לאפס. לכן גם במקרה שלא נקלטים במצב 0, הגבול הוא 1.

הערה
לא מספיק לטעון שאם תהליך שואף לאין סוף, אז ההסתברות שיש גדילה בשלב מסוים, שואפת ל 1 כאשר מספר השלבים שואף לאין סוף. גם הילוך מקרי לא סימטרי שמוטה לימין שואף לאין סוף, אבל בכל שלב יש הסתברות חיובית קבועה שנלך שמאלה.

ב. הסיכוי שווה בקירוב ל 0.25 שזהו הסיכוי שתהיה הכחדות. תחילה נראה את חישוב סיכויי ההכחדות. ההסתברות להכחדות כאשר מתחילים עם שני פרטים שווה לרבוע ההסתברות להכחדות כאשר בדור ההתחלתי יש פרט אחד.

תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט היא $\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}>1$. לכן סיכויי ההכחדות, כאשר מתחילים עם פרט אחד שווים לפתרון הקטן שגדול מ 0 וקטן מ 1 של המשוואה $t=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t^2$.

פתרון זה הוא 0.5 . לכן, כאשר מתחילים עם שני פרטים סיכויי ההכחדות הם $0.5^2=0.25$.
אם אין הכחדות אז מספר הפרטים שואף לאין סוף. במקרה זה אי אפשר לדלג על כל הערכים שבין 100 ל 196: כאן לא יתכן שמספר הצאצאים של פרט מסוים יהיה גדול מ 2, ולכן שום דור לא גדול מכפלים הדור הקודם. מספר הפרטים בכל דור הוא זוגי. אי אפשר להגיע ממצב שערכו קטן או שווה 98 למצב שערכו גדול או שווה 198.
אם יש הכחדות, אז הסיכוי להגיע לקבוצת המצבים הזאת הוא קטן ביותר: אם מגיעים לקבוצת המצבים הזאת, אז ההסתברות להכחדות היא אפסית.לכן לחיתוך המאורעות של הכחדות והגעה לקבוצת המצבים הזאת יש הסתברות אפסית.

שאלה 3

א. זו שרשרת מרקוב בעלת שמות אחרים של המצבים ואותן הסתברויות מעבר כמו המקורית.
כל התאמה חד-חד ערכית של מצבי שרשרת היא שרשרת מרקוב.

ב. נראה שהתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב.

אם התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ נמצאת במצב i, אז השרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ נמצאת במצב i או במצב $-i$.

הסיכוי שהיא במצב i הוא
$$a=\frac{\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\cdot 0.6^{\frac{n+i}{2}}\cdot 0.4^{\frac{n-i}{2}}}{\binom{n}{\frac{n+i}{2}}\cdot 0.6^{\frac{n+i}{2}}\cdot 0.4^{\frac{n-i}{2}}+\binom{n}{\frac{n-i}{2}}\cdot 0.6^{\frac{n-i}{2}}\cdot 0.4^{\frac{n+i}{2}}},$$

ביטוי זה לא תלוי בסדר המהלכים עד כה. ביטוי זה לא תלוי בערכו של n (לא תלוי בתקופה).
ההסתברות שהתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ יעבור למצב $i+1$ היא $a\cdot 0.6+(1-a)0.4$.

ג. נראה שאין מרקוביות.
מתקיים $P(Y_3=2\mid Y_2=1,Y_1=2)=0.6>P(Y_3=2\mid Y_2=1,Y_1=0)$.
כך ההיסטוריה הקודמת מוסיפה מידע.
<u>הסבר</u>: בשלב 1 נמצאים במצב 2, רק אם התהליך המקורי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ נמצא בנקודה 2, כי הוא לא יכול להגיע לנקודה -2 בשלב זה. אם הוא נמצא בנקודה 2 בשלב 1 ומתקיים $(Y_2=1)$, אז ברור ש $(X_2=1)$. במקרה כזה יתקיים $(X_3=2)$ בהסתברות 0.6. לעומת זאת, אם מתקיים $(Y_1=0)$, אז יתכן שיתקיים $(Y_2=1)$ בגלל ש $(X_3=1)$ או בגלל ש $(X_3=-1)$.מכיון שההסתברות של התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ לעבור מ -1 ל -2 היא קטנה מ 0.6 וההסתברות לעבור מ 1 ל 2 היא 0.6 , אז הסיכוי שיתקיים $(Y_3=2)$ קטן מ 0.6 .
אפשר גם להראות שאין הומוגניות בזמן.
אנו יודעים שבזמן 0 התהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ נמצא במצב 1. לכן התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ יעבור למצב 2 בסיכוי 0.6 . לעומת זאת, אם בשלב 2 התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ נמצא במצב 1, אז יתכן שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ נמצא במצב -1, שממנו ההסתברות של התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ לעבור למצב 2 היא 0.4 .
לכן ההסתברות לעבור למצב 2 היא קטנה מ 0.6 .

ד. זהו הילוך מקרי מוטה ימינה. לכן נבקר בכל השלמים. הסיכוי שנבקר במצב גם שני שלבים לאחר הביקור הראשון בו, הוא $0.6\cdot 0.4+0.4\cdot 0.6=0.48$. נסתכל על קבוצת המאורעות של ביקורים חוזרים לאחר שני שלבים בקבוצת המצבים שהם כפולות שלמות חיוביות של למשל 5. זו קבוצה של מאורעות בלתי תלויים שסכום ההסתברויות שלהם היא אין סוף. לכן, לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות 1 יתרחשו אין סוף מאורעות מקבוצה זו.
<u>הערה</u>
צריך להסתכל על קבוצת מאורעות בלתי תלויים. קבוצת המאורעות של חזרות אי פעם למצבים אינה קבוצת מאורעות בלתי תלויים. גם קבוצת המאורעות של חזרות תוך שני צעדים למצבים שכנים אינה קבוצת מאורעות בלתי תלויים.

שאלה 4

א. בכל מצב שוהים בממוצע $\frac{1}{3}$ יחידת זמן ואז קופצים למצב אחר. ממצב 1 בהכרח עוברים למצב 2.

ממצבים שמשמאלה למצב 1, יכולים לעבור ימינה או שמאלה בהתאם למטריצת המעבר בזמני הקפיצות. יהי e_i - תוחלת זמן ההגעה ממצב i לקבוצת המצבים 2 ו -2.

מתקיים

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{3} \\ e_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{1+2} e_1 + \frac{2}{1+2} e_{-1} \\ e_{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1+2} e_0 + \frac{2}{1+2} \cdot 0 \end{cases}$$

ב. יתכן שנסחף ל $+\infty$. אבל גם לא בודאות חוזרים ממצב -1 למצב 0 ולכן תתכן סחיפה ל $-\infty$.

יהי a הסיכוי להגיע אי פעם מ 0 ל 1. כדי לחזור ממצב -1 למצב 1, צריך ראשית להגיע למצב 0. סיכויי ההגעה ממצב -1 למצב 1 הם a^2. מתקיים $a = \frac{1}{1+2} \cdot 1 + \frac{2}{1+2} a^2$. מתקיים $a = 0.5$. לכן בסיכוי חצי נסחף בחיובים ובסיכוי חצי נסחף בשליליים.

ג. בסיכוי 0.5 נסחפים בחיובים ואז ביחידת זמן יש בממוצע 3 קפיצות ימינה. בסיכוי 0.5 נסחפים לשליליים ואז ביחידת זמן יש בממוצע קפיצה אחת ימינה ושתי קפיצות שמאלה.

התוחלת המבוקשת היא $0.5 \cdot 3 + 0.5(1-2) = 1$.

ד. כל ביקור במצב 0 אורך בממוצע $\frac{1}{3}$ יחידת זמן. כל ביקור במצב 0 הוא ביקור אחרון אם הולכים לאחריו למצב 1 או הולכים לאחריו למצב -1 וממנו לא חוזרים למצב 0. לכן כל ביקור הוא אחרון בהסתברות $\frac{2}{3}$. כך מתקיים הביקור ה- k בסיכוי $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$, ואם הוא מתקיים אז תוחלת אורכו היא $\frac{1}{3}$. לכן תוחלת סכום אורכי הביקורים היא $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

שלומי