מועד ב' סמסטר ב' תשע"ו
30/09/16

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בשלושת השאלות שבבחינה יש בסך הכל 12 סעיפים. ענו על כל הסעיפים.
כל סעיף הוא בעל ניקוד של 9 נקודות. כך ניתן לצבור בסך הכל 108 נקודות.
הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N,100\}$.
נמקו את תשובותיכם !
אנא השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

<u>שאלה 1</u> (36 נקודות)

נתונה מערכת תור של שרת אחד ואין סוף מקומות המתנה. בכל רגע נתון שבו יש לקוחות במערכת, השרת משרת לקוח בודד. קצב השירות הוא מעריכי בעצמה 1. למערכת מגיעים לקוחות בקבוצות. מופע הקבוצות המגיעות למערכת הוא פואסוני בעצמה $\lambda > 0$. בכל קבוצה של לקוחות המגיעים למערכת יש בדיוק a לקוחות. לקוחות המגיעים למערכת כאשר השרת עסוק, מצטרפים לתור הממתינים לשרות. כל לקוח משורת לחוד בזמן השונה מהזמן שבו משורתים גם בני קבוצתו. כל בני אותה קבוצה, משורתים בסדר שרירותי. נניח שבזמן 0 אין במערכת לקוחות.

יהי $\{X(t)\}$ התהליך המתאר את מספרי הלקוחות שבמערכת בזמנים השונים.
יהי $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ התהליך בזמני הקפיצות של התהליך $\{X(t)\}$.

<u>א</u>. נניח ש $a=2$. מצאו את היוצר האינפיניטיסימלי של התהליך $\{X(t)\}$.
<u>ב</u>. נניח ש $a=2$. מצאו את תוחלת הזמן עד שבמערכת יהיו לראשונה 2 לקוחות.
<u>ג</u>. נניח ש $a=\lambda=1$. מצאו את תוחלת הזמן שעובר בין הגעת הלקוח הראשון עד שהמערכת תתרוקן לראשונה מאז הגעתו.
<u>ד</u>. בסעיף זה נניח שמתקיים $a\lambda<1$. תוכלו להניח ללא צורך בהוכחה שאם מתקיים $a\lambda<1$ אז המערכת היא נשנית חיובית.
מצאו תנאי הכרחי ומספיק על a כך שלתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ יהיה קיים וקטור סטציונרי שמקיים את תנאי האיזון המפורט.

שאלה 2 (36 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בת קבוצת המצבים $\{1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח שמתקיים $(X_0 = 1)$.

א. האם קיים בשרשרת וקטור הסתברויות סטציונריות יחיד ?

ב. מצאו $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n)}$.

ג. מהי בקירוב ההסתברות שבשלושת השלבים העוקבים 100 , 101 , 102 נבקר בשלושה מצבים שונים ?

ד. האם על סדרת המשתנים המקריים $\{X_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ חל החוק החזק של המספרים הגדולים ?
האם על סדרת המשתנים המקריים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ חל החוק החזק של המספרים הגדולים ?

שאלה 3 (36 נקודות)

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב שקבוצת מצביה היא קבוצה חלקית של המספרים הממשיים.

עבור כל $1 \le n < \infty$ טבעי יהי Y_n אינדיקטור למאורע $(X_n > X_{n-1})$.

עבור כל $1 \le n < \infty$ טבעי יהי $b_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{n}$.

א. האם יתכן שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2\}$ שבה קיים בהסתברות 1 , $\lim_{n\to\infty} b_n = 0.5$ וגם קיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(n)}$?

ב. האם יתכן שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ שבה קיים בהסתברות 1, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0.5$ וגם קיים $\lim_{n\to\infty} P_{1,1}^{(n)}$?

ג. האם יתכן שבהסתברות 0.5 אברי הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ישאפו לגבול 0 ובהסתברות 0.5 הם ישאפו לגבול 0.5 ?

ד. האם יתכן שבהסתברות חיובית תתקימנה סימולטנית שתי דרישות: אין סוף מאברי הסדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ יהיו קטנים מ 0.4 וגם אין סוף מאברי הסדרה יהיו גדולים מ 0.6 ?
