פתרון מקוצר לבחינה מ 30/08/10

שאלה 1

א. מצבים $\{1,2,3\}$ הם מחלקה בלתי פריקה סופית של מצבים נשנים (יש מסלול מכל אחד מהם לכל אחד מהאחרים ואין מסלול מקבוצה זו אל מחוץ לה).
מצב 4 הוא מצב חולף (יש מעבר ממנו למצבים $\{1,2,3\}$ ואין דרך חזרה אליו).

ב.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{3+1} & \frac{1}{3+1} & 0 \\ \frac{1}{1+1} & 0 & \frac{1}{1+1} & 0 \\ \frac{2}{2+2} & \frac{2}{2+2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ג. צריך לבחור קצב של לפחות 4.
הצגה ראשונה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-4t}\frac{(4t)^k}{k!}\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^k$$

הצגה שניה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-8t}\frac{(8t)^k}{k!}\begin{pmatrix} \frac{4}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{2}{8} & \frac{2}{8} & \frac{4}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^k$$

ד. לאחר שעוזבים את מצב 4 לראשונה, יותר לא חוזרים אליו. ההסתברות המבוקשת שווה להסתברות שעד זמן t לא נעזוב את מצב 4. זמן השהות במצב 4 מתפלג $\exp(1)$. ההסתברות המבוקשת היא e^{-t}.

ה. זו התוחלת של משתנה $\exp(1)$ שהיא שווה ל 1.

<u>שאלה 2</u>

תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט היא גדולה מ 1 ($\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 2>1$).

מבוקש הפתרון החיובי הקטן של המשוואה $t=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t^2$. מתקבל פתרון $t=\frac{1}{2}$.

קבוצת המצבים $\{1,2,3,4,5\}$ היא קבוצה סופית של מצבים חולפים. לכל אחד מהם יש הסתברות גבולית ששווה ל 0. לכן סכום ההסתברויות הגבוליות של מצבים אלה הוא 0. לכן ההסתברות הגבולית של המאורע $(X_n>5)$ שווה להסתברות של המשלים להכחדות. לכן היא שווה ל $1-0.5=0.5$.

(אם אין הכחדות אז יש שאיפה לאינסוף).

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. יהי $e_{0,2}$ - תוחלת זמן ההגעה ממצב 0 למצב 2.

יהי $e_{1,2}$ - תוחלת זמן ההגעה ממצב 1 למצב 2.

מתקיים

$$\begin{cases} e_{0,2}=1+e_{1,2} \\ e_{1,2}=1+0.5e_{0,2}+0.5\cdot 0 \end{cases}$$

מתקבל $e_{0,2}=4$.

<u>ב</u>. תוחלת זמן ההגעה שווה לתוחלת זמן ההגעה ממצב 3 למצב 2 בהילוך מקרי סימטרי על כל הישר. תוחלת זו שווה ל ∞ .

נתן גם פתרון בעזרת משוואה: $e_{3,2}=1+0.5\cdot 0+0.5e_{4,2}$ כאשר $e_{4,2}=2e_{3,2}$.

מתקבלת משוואה $e_{3,2}=1+e_{3,2}$ שאין לה פתרון סופי.

<u>שאלה 4</u>

<u>א</u>. לא

נניח ש $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת של מצב בודד שבו כמובן תמיד נשארים. במקרה זה כל אברי הסדרה $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ בהכרח מקבלים את הערך 1.

<u>ב</u>. לא

נתן דוגמא של שרשרת בעלת המצבים $\{1,2,3,4,5,6\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

נניח שמתקיים $(X_0=1)$.

אם מתקיים $(Y_0=1,Y_1=2,Y_2=2,Y_8=3)$ אז מכיון שבשלב 2 לא גילינו מצב חדש אז ברור שהתהליך $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ נקלט במחלקה $\{4,5,6\}$. במחלקה זו בכל פעם הסיכוי להגיע למצב שעדיין לא הגענו אליו אף פעם הוא 0.3. לכן $P(Y_9=4\mid Y_0=1,Y_1=2,Y_2=2,Y_8=3)=0.3$.

אם מתקיים $\left(Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3, Y_8 = 3\right)$ אז יתכן שהתהליך נקלט במחלקה $\{2,3\}$ שבה אחרי שלב 2 כבר אי אפשר להגיע למצב שבו עדיין לא בקרנו. לכן
$P\left(Y_9 = 4 \mid Y_0 = 1, Y_1 = 2, Y_2 = 3, Y_8 = 3\right) < 0.3$.

ג. לא

שרשרת מרקוב בעלת קבוצת המצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח שמתקיים $\left(X_0 = 1\right)$. כך בשלבים הזוגיים נמצאים במצב 1 ובשלבים האי זוגיים נמצאים במצבים 2 ו 3.

מתקיים $P\left(Y_7 = 3 \mid Y_6 = 2\right) = 0.5$ כי יתכן שבשלב 7 נגיע למצב שאליו עוד לא הגענו.

מתקיים $P\left(Y_8 = 3 \mid Y_7 = 2\right) = 0$ כי בשלב זוגי אי אפשר להגיע למצב שאליו עוד לא הגענו.

ד. לא

נתן שוב את השרשרת שנתנו בסעיף ב'. ראינו שאם $\left(X_0 = 1\right)$ אז התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ אינו מרקובי.

אך אם מתקיים $\left(X_0 = 3\right)$ אז התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב הומוגנית לפי ההסבר של סעיף א' לגבי מצב סופג.

ה. כן

מצב נשנה אפס הוא מצב שאם מתחילים בו אז חוזרים אליו בהסתברות 1, אך תוחלת זמן החזרה היא ∞. אף פעם לא מתקיים $Y_{n+1} < Y_n$. לכן לא ניתן לחזור למצב לאחר שעוזבים אותו.

בתהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ אם מצב הוא לא סופג אז הוא חולף. לכן לא קיימים מצבים נשנים אפס.

שלומי