פתרון מקוצר לבחינה מ 19/07/10

שאלה 1

א. תוחלת מספר הצאצאים של כל פרט היא $\frac{3}{8}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2<1$.
מכיון שתוחלת מספר הצאצאים של כל פרט קטנה מ 1 אז התהליך כחד בודאות.

ב. X_8 בכל מקרה מקבל איזשהו ערך סופי. כל אחת ממספר סופי של שושלות נכחדת בודאות.
לכן התהליך כחד בודאות.

ג. $E(W)=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 2=1$. לכן התהליך $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ נכחד בודאות ונספג במצב 0.
X_n תמיד אי שלילי. לכן $\lim_{n\to\infty}P(Y_n>X_n)=0$. לא השתמשנו בהנחת האי תלות.

שאלה 2

דרך ראשונה

זהו הילוך מקרי על גרף. למדנו שבהילוך מקרי על גרף קיימת לצומת a הסתברות סטציונרית $\frac{d_a}{D}$,
כאשר d_a היא דרגת צומת a ו D הוא סכום הדרגות ברכיב הקשירות של a.
לכן כאן $\pi_a=\frac{1}{1+3+2+2}=\frac{1}{8}$ ותוחלת זמן החזרה ל a היא $8=\frac{1}{1/8}$.

דרך שניה

נחשב את ההסתברויות הסטציונריות של מצב a ללא שימוש בתנאי האיזון המפורט.

$$\begin{cases}\pi_a+\pi_b+\pi_c+\pi_d=1\\ \pi_a=\frac{1}{3}\pi_b\\ \pi_b=\pi_a+\frac{1}{2}\pi_c+\frac{1}{2}\pi_d\\ \pi_c=\frac{1}{3}\pi_b+\frac{1}{2}\pi_d\\ \pi_d=\frac{1}{3}\pi_b+\frac{1}{2}\pi_c\end{cases}$$

דרך שלישית

נחשב ישירות את תוחלת מספר הצעדים עד חזרה לצומת a.
יהיו e_a,e_b,e_c,e_d התוחלות של זמני ההגעה לצומת a מהצמתים השונים.
בכל מקרה עושים צעד ואז עוברים למצב אחר.

$$\begin{cases} e_a = 1 + e_b \\ e_b = 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}e_c + \frac{1}{3}e_d \\ e_c = 1 + \frac{1}{2}e_b + \frac{1}{2}e_d \\ e_d = 1 + \frac{1}{2}e_b + \frac{1}{2}e_d \end{cases}$$

(משיקולי סמטריה $e_c = e_d$).

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. לא

יתכן ש $P_{1,1} = 1$ ו $P_{1,i} = 0$ עבור כל $i \geq 2$ ויתר אברי המטריצה הם חיובים.

כך יש 21 אברים חיובים ורק מצב 1 הוא נשנה (מצב סופג שיש מסלול אליו מכל המצבים האחרים).

<u>ב</u>. לא

נתן דוגמא

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

השרשרת אי פריקה. במצב 1 ניתן לשהות שני צעדים רצופים ולכן המחזור שלו הוא 1.
אי מחזוריות היא תכונה מחלקתית.

<u>ג</u>. לא

נתן דוגמא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש מצבים בעלי מחזור 2 ויש מצבים בעלי מחזור 3.

<u>ד</u>. כן

לגבי כל מצב i חולף תמיד קיימת ההסתברות הגבולית $\lim_{n\to\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$.

כדי שיהיו מצבים שלגביהם לא קיימת ההסתברות הגבולית, צריך שתהיה לפחות מחלקה אחת בלתי פריקה ומחזורית. מכיון שמחלקה זו היא בלתי פריקה אז אין ממנה מעברים למצבים שמחוץ לה.
במחלקה כזאת יש לפחות שתי קבוצות בנות $1 \leq i \leq j$, $i + j \leq 5$ מצבים כך שיש לפחות j מצבים שיש בכל אחד משורותיהם $5 - i$ אפסים ויש לפחות מצב אחד שיש בשורתו $5 - j$ אפסים.
כך יש לפחות $j(5-i) + (5-j)$ אפסים. ביטוי זה אינו קטן מ 8 עבור כל $1 \leq i \leq j$, $i + j \leq 5$.

שאלה 4

א. רצף המשתנים $X(t)$ הוא שרשרת מרקוב.

הצרכן הראשון מקבל במצבים 0 עד 8 זרם צרכנים בעל עוצמה ממוצעת קבועה והוא משרת אותם בעצמה קבועה. זו מערכת תור של שרת בודד עם מופע פואסוני ומשך שירות מעריכי עם 8 מקומות המתנה.

רצף המשתנים $Y(t)$ אינו שרשרת מרקוב.

בזמן 0 זמן העזיבה של מצב 0 לא מתפלג מעריכית. כדי לעזוב לראשונה את מצב 0 צריך שקודם יגיעו מספר צרכנים ומקומות ההמתנה שאצל הצרכן הראשון יתמלאו.

ב. $X(t)$ אף פעם לא גדול מ 9 (אף פעם לא מגיעים שני לקוחות באותו זמן בדיוק ולכן המחסום של 9 לא נשבר). לכן $X(t)$ לא שואף ל ∞.

$X(t)$ היא שרשרת בזמן רציף בלתי פריקה בת קבוצת המצבים $\{0,1,2,\cdots,9\}$. לכן למצב 0 יש הסתברות גבולית חיובית.

לתחנה מגיעים צרכנים בקצב ממוצע של 2. אף פעם לא ניתן שירות בקצב ממוצע העולה על 2. רק כאשר שני השרתים הם פעילים אז ניתן שירות בקצב 2. אך השרת הראשון יהיה בטל בפרופורציה חיובית של הזמן. לכן לאורך זמן הזרם של המגיעים יהיה גדול מזרם המסיימים שרות (עבור כל $\varepsilon > 0$ קבוע החל מזמן מסוים תמיד יהיה המספר המצטבר של המגיעים לתחנה החל מזמן 0 ועד זמן זה שווה ליותר מ $(2-\varepsilon)t$ צרכנים, אך קיים $\varepsilon > 0$ שעבורו יסיימו שירות עד אותו שלב פחות מ $(2-2\varepsilon)t$). לכן, מספר הצרכנים שבתחנה ישאף לאינסוף. מכיון שמספר הצרכנים שאצל השרת הראשון הוא חסום, אז מספר הצרכנים שאצל השרת השני ישאף לאינסוף. לכן גם מתקיים $\lim_{t\to\infty} P(Y(t)=0)=0$.

שלומי