מועד ב' סמסטר ב' תשס"ח
12/10/08

בחינה במבוא לתהליכים סטוכסטיים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
אסור השימוש בכל חומר עזר. מחשב כיס מותר.
בבחינה זו יש 3 עמודים ו 11 שאלות.
ענו על כל 11 השאלות. משקל כל שאלה הוא 9 נקודות.
תלמיד הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N+7,100\}$.
נמקו את תשובותיכם.
אנא השאירו את הדף הראשון של מחברת הבחינה ריק.

בהצלחה !

<u>שאלה 1</u>
נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

מיינו את מצבי השרשרת למצבים חולפים ונשנים ולמחלקות אי פריקות של מצבים נשנים.

<u>שאלה 2</u>
מצאו שלושה וקטורים סטציונרים שונים בשרשרת שתוארה בשאלה 1.

<u>שאלה 3</u>
לגבי השרשרת שתוארה בשאלה 1, לגבי כל מצב חולף, מצאו את תוחלת מספר הצעדים עד הקלטות במחלקה של מצבים נשנים.

<u>שאלה 4</u>
נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף בעלת יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

לגבי שרשרת זו, מצאו את מטריצת המעבר בזמן הקפיצות.

שאלה 5

מצאו שתי הצגות שונות של התהליך שתואר בשאלה 4 באמצעות טור מטריצות עם שעון פואסוני.

שאלה 6

נתונה שרשרת מרקוב בזמן רציף בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3\}$ ובעלת יוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מצאו בשתי דרכים שונות את $P_{1,1}(t)$ עבור כל t קבוע (אחת הדרכים- באמצעות פתרון משוואה דיפרנציאלית).

שאלה 7

נתונה שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3,4\}$ ובעלת מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מצאו $\lim_{n\to\infty} P_{1,3}^{(2n)}$.

שאלה 8

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את הטענה הבאה:

אם $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים בלתי תלויים כך שעבור כל n מתקיים $E(|X_n|) < 5$, ושהחוק החלש של המספרים הגדולים לא חל עליה, אז גם חוק זה לא חל על הסדרה $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על-ידי $Y_n = \max\{X_n, X_{n+1}\}$ עבור כל $n \geq 1$.

שאלה 9

האם קיימת שרשרת מרקוב $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ בעלת מרחב מצבים שהוא כל השלמים, שבה, בהינתן $X_0 = 0$, הסתברות המאורע ש X_3 גדול ממש מכל X_n עבור כל $n \neq 3$, היא חצי בדיוק, וגם בהינתן $X_0 = 1$, הסתברות המאורע ש X_3 גדול ממש מכל X_n עבור כל $n \neq 3$, היא חצי בדיוק ?

<u>שאלה 10</u>

באי מסוים יש 10^6 תושבים. אחד מתושבי האי מספר לתושב אחר בדיחה. כל אדם ששומע את הבדיחה לא מספר אותה לאף תושב בסיכוי $\frac{1}{6}$, מספר אותה לתושב אחד בסיכוי $\frac{1}{2}$, מספר אותה ל 50 תושבים בסיכוי $\frac{1}{12}$ ומספר אותה ל 100 תושבים בסיכוי $\frac{1}{4}$. בכל מקרה שתושב מספר את הבדיחה שומעיו נבחרים באקראי מבין כל תושבי האי הכוללים את אלה שכבר שמעו אותה ואת אלה שעדיין לא שמעו אותה.

מהי בקירוב ההסתברות שמי ששמע ראשון את הבדיחה ישמע אותה שוב באיזשהו שלב ?

נמקו היטב את תשובתכם !

<u>שאלה 11</u>

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב של הילוך מקרי על כל השלמים, בו בכל שלב הולכים יחידה אחת ימינה בסיכוי 0.9 והולכים יחידה אחת שמאלה בסיכוי 0.1 . נניח שמתקיים $X_0 = 0$.

נגדיר סדרת משתנים $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך שלכל n , $Y_n = |X_n|$.

עבור a ממשי קבוע, נגדיר סדרות משתנים $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך שלכל n , $Z_n = |X_n - a|$ ו $W_n = \max\{Y_n, Z_n\}$.

כך למשל, אם $a = 1$ אז אם $X_n = -7$ אז $Y_n = |-7| = 7$, $Z_n = |-7-1| = 8$, $W_n = \max\{7,8\} = 8$.

עבור אילו ערכי a ממשיים התהליך הסטוכסטי $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ הוא שרשרת מרקוב הומוגנית ?

עבור כל ערך שהוא לא שרשרת מרקוב הומוגנית, יש לציין אם הוא אינו מרקובי או רק לא הומוגני בזמן.
