

פתרון תרגיל 6 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{א.}$$

ב. מכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר (אפילו בצעד אחד). לכן השרשרת היא בלתי פריקה.
ג. מכל מצב ניתן לחזור לעצמו בצעד אחד. לכן המחזור הוא 1.

ד. זו שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר דו-סטוכסטית. לכן הוקטור האחיד $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ הוא וקטור סטציונרי.

נראה זאת גם בדרך הכללית למציאת וקטור סטציונרי.

$$\left(\pi_1, \pi_2, \pi_3\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} \quad \text{וקטור סטציונרי מקיים}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{מפתרון המערכת מתקבל וקטור סטציונרי}$$

ה. במחלקה בלתי פריקה אין יותר מוקטור סטציונרי יחיד. זה מתקבל גם משיקולים אלגבריים כי אין פתרון נוסף למערכת. תנאי האי פריקות הוא שגורם ליחידות.

ו. בשרשרת בלתי פריקה ובלתי מחזורית זאת היא ההסתברות הסטציונרית של המצב 0 שהיא $\frac{1}{3}$.

תנאי האי מחזוריות הוא שגורם לגבולית להיות שווה לסטציונרית.

ז. מתקיים $\pi_0 = \frac{1}{E_0}$. לכן תוחלת הזמן עד חזרה למצב 0 לאחר שמתחילים בו היא 3.

שימו לב גם שמספר הצעדים עד חזרה למצב 0 ממצב 0 מתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$ כי בכל שלב בלי שום קשר

למצב שבו נמצאים יש סיכוי $\frac{1}{3}$ שבצעד הבא נהיה במצב 0.

שאלה 2

נגדיר מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב על הטבעיים:

$$P_{1,2} = 1$$

$$\text{עבור } P_{2,i} = 0.5^{i-2} : i \geq 3 \quad \left(\sum_{i=3}^{\infty} 0.5^{i-2} = 1 \text{ שימו לב ש} \right)$$

$$\text{עבור } P_{i,1} = 1 : i \geq 3$$

בכל אחד מהמצבים 1 ו 2 מבקרים בכל ביקור שלישי. לכן שכיחות הביקורים בכל אחד מהם היא $\frac{1}{3}$ וזו

גם ההסתברות הסטציונרית של כל אחד מהם. מתקיים $\pi_1 = (1 - \pi_1 - \pi_2) \cdot 1$, $\pi_2 = \pi_1 \cdot 1$.
לכל מצב ניתן לחזור רק לאחר כפולות של 3. לכן המחזור של כל מצב הוא איזשהי כפולה של 3. למצב 1 אפשר לחזור ב 3 צעדים (אפילו מוכרחים לחזור ב 3 צעדים). לכן המחזור שלו הוא לא יותר מ 3. מכאן המחזור שלו הוא בדיוק 3. מכאן המחזור של כל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הוא 3.

שאלה 3

א. בשלב 0 ההשערה נכונה בסיכוי $\frac{1}{2}$. בשלב 1 ההשערה נכונה בסיכוי $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$.

אילה תבחר בהשערה שהיא תראה וסיכוייה הם $\frac{5}{8}$.

ב. סדרת ההשערות של ליאת היא שרשרת מרקוב עם מטריצת מעבר

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

זאת היא מטריצה בלתי פריקה ובלתי מחזורית (ניתן לשהות במצב שני צעדים רצופים).
ההסתברות שבשלב ה-1000 תהיה השערה נכונה, שווה בקירוב להסתברות הסטציונרית של המצב הראשון. ההסתברות הסטציונרית הזאת היא $\frac{2}{3}$. אם פולינה תבחר בהשערה שהיא תראה,

אז סיכוייה הם בקירוב $\frac{2}{3}$.

נפרט כאן גם את הדרך למציאת ההסתברויות הסטציונריות:

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

ג. במטריצה בלתי פריקה נשנית חיובית, יש התייצבות של השכיחויות של מצבים סביב ההסתברויות הסטציונריות שלהם. לכן ההסתברות שיהיה רוב להשערה הנכונה לאחר פרק זמן ארוך היא בקירוב 1. לכן אם אדם יבחר בהשערה שתופיע יותר אז סיכוייהם בקירוב 1.

ד. השרשרת היא לא מחזורית, לכן גם במקומות הזוגיים יש התייצבות סביב ההסתברות הסטציונרית. לכן גם אופיר יוכל לבחור בהשערה הנכונה בהסתברות שהיא בקירוב 1.