מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 12

שאלה 1

נתן דוגמא ליוצר מתאים בעל קבוצת המצבים $\{1,2,3,4,5,6\}$:

-2	2	0	0	0	0
0	-2	1	1	0	0
0	0	-3	0	3	0
0	0	0	-4	0	4
4	0	0	0	-4	0
3	0	0	0	0	-3

אם מתחילים במצב 1, אז אחרי זמן בעל התפלגות $\exp(2)$ עוזבים את מצב 1 ועוברים למצב 2. במצב 2 מבלים עוד זמן המתפלג $\exp(2)$ עד עזיבתו למצבים 3 או 4. לכן הזמן עד הקפיצה השניה מתפלג כסכום של שני משתנים בעלי התפלגות $\exp(2)$. כאמור, ממצב 2 עוברים למצב 3 או למצב 4. בכל אחד מהם, התפלגות זמן השהות היא מעריכית עם פרמטר אחר. עירוב של שני משתנים מעריכיים אינו בעל התפלגות מעריכית. לכן הזמן בין הקפיצה השניה לקפיצה השלישית אינו בעל התפלגות מעריכית ולכן הזמן המצטבר עד הקפיצה השלישית אינו בעל התפלגות של סכום משתנים מעריכיים.
אם מגיעים למצב 3, אז זמן השהות בין הקפיצה השניה לקפיצה השלישית מתפלג $\exp(3)$, ולאחריו עוברים למצב 5 שבו זמן השהות מתפלג $\exp(4)$. אם ממצב 2 מגיעים למצב 4, אז הזמן עד הקפיצה הבאה מתפלג $\exp(4)$ וזמן הקפיצה הבאה שהיא ממצב 6, מתפלג $\exp(3)$.
לכן הזמן מההתחלה במצב 1 עד הקפיצה הרביעית הוא בכל מקרה בעל התפלגות של סכום משתנים מעריכיים בעלי פרמטרים 2,2,3,4 כאשר הסדר בין שני המשתנים המתפלגים $\exp(3)$ ו $\exp(4)$ אינו ידוע מראש.
נתן גם המחשה מדוע עירוב של שני משתנים מעריכיים שוני פרמטר אינו בעל התפלגות מעריכית.
אם זמן הצפיה לאירוע הוא בסיכוי שווה משתנה $\exp(3)$ או משתנה $\exp(4)$, אז בזמן 0 יש הסתברות $0.5(3h+o(h))+0.5(4h+o(h))=3.5h+o(h)$ להתרחשות האירוע עד זמן h. אם האירוע לא התרחש עד זמן t, אז ההסתברות המותנה שמדובר בכל אחד משני המשתנים כבר אינן שוות. לכן ההסתברות שהאירוע יתרחש בזמן באורך h, כבר אינה $3.5h+o(h)$. למעשה, כאשר t שואף לאינסוף, אז ההסתברות המותנה שמדובר במשתנה בעל דרגת סיכון נמוכה, שואפת ל 1.

שאלה 2

עבור כל מצב התחלתי, התפלגות המצב שבו נמצאים שואפת כאשר $t\to\infty$ להתפלגות הסטציונרית שהיא $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. זו ההתפלגות הגבולית של $X(t)$ וגם של $X(2t)$. מכיון שהפרש הזמנים בין t ל $2t$ שואף לאינסוף כאשר $t\to\infty$, אז גם התלות ביניהם נעלמת. לכן מתקיים

$$\lim_{t\to\infty}E\left(\frac{X(2t)}{X(t)}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}$$

שאלה 3

התהליך $Y(t)$ הוא שרשרת מרקוב. עבור כל זוג מצבים, קצבי המעברים ביניהם הם כפולים ביחס לתהליך $X(t)$. אם בתהליך $X(t)$ ההסתברות שבפרק זמן באורך h, יהיה מעבר ממצב i למצב j היא $\lambda_{i,j}h+o(h)$, אז בתהליך $Y(t)$ הסתברות זו היא $2\lambda_{i,j}h+o(h)$. כך מתקיימות ההנחות של שרשרת בזמן רציף.

התהליך $W(t)$ אינו שרשרת מרקוב. פרקי הזמן $(t+h)^2-t^2$ משתנים עם השתנות t. לכן, אין הסתברויות שוות לקפיצות בפרקי זמן שונים בעלי אורך זהה.

למעשה מתקיים $P(W(h)\neq i\,|\,W(0)=i)=P\left(X\left(h^2\right)\neq i\;|\;X(0)=i\right)=\lambda_i h^2+o(h)=o(h)$

ולכן בזמן 0, אין קצב עזיבה מעריכי של המצב (קצב עזיבה מעריכי הוא בסדר גודל של h ואינו $o(h)$).

שלומי