מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 11

שאלה 1

מרחב המצבים הוא $\{0,1,2,3\}$. כאשר יש $i \ge 1$ חולים אז עצמת המעבר למצב $i-1$ היא סכום העצמת של הבראה של i חולים ולכן היא שווה ל $i\mu$. כאשר יש $i \le 2$ חולים אז יש $3-i$ בריאים וכך עצמת המעבר למצב $i+1$ היא $(3-i)\lambda$.

מתקבלת מטריצת יוצר

$$\begin{bmatrix} -3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\mu+2\lambda) & 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{bmatrix}$$

שאלה 2

צריך לבחור שעון עם קצב של לפחות 8.

נבחר שעון עם קצב $\lambda = 8$ ונקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-8t}\frac{(8t)^k}{k!}\begin{pmatrix} \frac{4}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}^k$$

או אם נבחר שעון בקצב $\lambda = 16$ נקבל הצגה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-16t}\frac{(16t)^k}{k!}\begin{pmatrix} \frac{12}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{8}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{15}{16} \end{pmatrix}^k$$

שאלה 3

א. $P_{1,1}(0) = 1$ (תמיד בזמן אפס נמצאים במצב שבו התחלנו).

ב. מתקיים $\lim_{t\to\infty} P_{1,1}(t) = \pi_1$.

נחשב את וקטור ההסתברויות הסטציונריות:

$$\begin{cases} 4\pi_1 = 5\pi_2 + 5\pi_3 \\ 8\pi_2 = 3\pi_1 \\ 5\pi_3 = \pi_1 + 3\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

ומתקבל וקטור סטציונרי $\left(\pi_1,\pi_2,\pi_3\right)=\left(\frac{5}{9},\frac{5}{24},\frac{17}{72}\right)$ ולכן התשובה היא $\frac{5}{9}$.

ג. ממצבים 2 ו 3 יש אותה עוצמת מעבר למצב 1 (עוצמה של 5). לכן, מבחינת הסיכויים להיות במצב 1 בשלב מסוים, המעברים בין המצבים 2 ו 3 הם מעברי סרק. את מצב 1 עוזבים למצבים האחרים בעוצמה כוללת של 4. כדי לחשב את הסתברויות המעבר למצב 1, נוכל להצטמצם ביוצר אינפיניטיסימלי

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$P_{1,1}'(t)=-4P_{1,1}(t)+5\left(1-P_{1,1}(t)\right)$$

ולכן $P_{1,1}'(t)=-9P_{1,1}(t)+5$

מתקבלת משפחת פתרונות: $P_{1,1}(t)=\frac{5}{9}+ce^{-9t}$.

לפי תנאי ההתחלה $P_{1,1}(0)=1$ נקבל $c=\frac{4}{9}$.

לכן מתקבל פתרון $P_{1,1}(t)=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}e^{-9t}$.

<u>שאלה 4</u>

א.

$$\begin{cases} (-2)\pi_1+4\pi_2+\pi_3=0 \\ \pi_1-8\pi_2+\pi_3=0 \\ \pi_1+4\pi_2-2\pi_3=0 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

ומתקיים $\pi_1=\pi_3=\frac{4}{9}$, $\pi_2=\frac{1}{9}$

ב.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} \\ \frac{4}{4+4} & 0 & \frac{4}{4+4} \\ \frac{1}{1+1} & \frac{1}{1+1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ג. מדובר בשרשרת אי פריקה ולכן יש וקטור סטציונרי יחיד. השרשרת לא מחזורית (ניתן לחזור לכל מצב לאחר שני צעדים וגם אחר שלושה צעדים) ולכן יש הסתברויות גבוליות ששוות להסתברויות הסטציונריות. וקטור ההסתברויות הסטציונרי היחד הוא $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. לכן לכל מצב יש הסתברות

גבולית של $\frac{1}{3}$.

ד. בזמני הקפיצות יש לכל מצב הסתברות גבולית של $\frac{1}{3}$, אך במצב 2 כל שהות היא בממוצע קצרה יותר מאשר במצבים האחרים. (משך זמן של שהות בודדת במצב 2 מתפלג $\exp(8)$ ובכל אחד מהמצבים האחרים משך שהות בודדת מתפלג $\exp(2)$.)

ה.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

כאן לגבי כל המצבים יש אותה התפלגות של שהות רצופה: $\exp(2)$.

שלומי