מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 10

שאלה 1

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & \\ 0.5 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0.1 & 0 \\ . & . & . & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

השרשרת לא פריקה. מספר הלקוחות הממוצע שמגיעים ביחידת זמן שרות הוא $0.5\cdot 0+0.4\cdot 1+0.1\cdot 3=0.7$ וכך הוא קטן מ 1, לכן השרשרת נישנת חיובית. נחשב את תוחלת זמן החזרה ממצב אפס למצב אפס:

$$E_0=0.5\cdot 1+0.4\left(E_{1,0}+1\right)+0.1\left(E_{3,0}+1\right)$$
$$E_{4,0}=4E_{1,0}$$

על פי השיוויון בין שתי השורות הראשונות אפשר לראות שתוחלות זמני החזרה למצב 0 ממצבים 0 ו 1 הן שוות.

$$E_{1,0}=0.5\cdot 1+0.4\left(E_{1,0}+1\right)+0.1\left(3E_{1,0}+1\right)$$
$$E_{1,0}=3\frac{1}{3}\Rightarrow E_0=3\frac{1}{3}\Rightarrow \pi_0=\frac{1}{E_0}=0.3$$

התוצאה הזאת מתאימה לתוצאה המתקבלת לפי הנוסחא $\pi_0=1-E(Z)$ כאשר Z הוא המשתנה המייצג את מספר הלקוחות הבאים ביחידת זמן.

לשם חישוב הרכיבים המבוקשים של הוקטור הסטציונרי נשתמש בשתי משוואות.

$$\begin{cases} \pi_0=0.5\pi_0+0.5\pi_1 \\ \pi_1=0.4\pi_0+0.4\pi_1+0.5\pi_2 \end{cases}$$

משתי משוואות אלה ומתוצאת החישוב הקודם שעשינו ל π_0 נקבל ש $\pi_0=\pi_1=0.3$, $\pi_2=0.12$.

שאלה 2

א. בכל שישיה של ששה טבעיים רצופים, יש מספר טבעי ראשון שבו נבקר. המיקום הסידורי של הטבעי הזה בתוך השישיה הוא המצב שמקבל המשתנה שמייצג את השישיה. נתון שבשישיה שמתחילה ב 1, הראשון שבו מבקרים הוא הטבעי הראשון שהוא 1. הדבר הראשון שנדרש, הוא שבשישיה שמתחילה ב 2012, הראשון שבו נבקר הוא 2014 שהוא הטבעי השלישי. המעברים בין כל שישיה לשישיה הבאה הם לפי מטריצת מעבר שאותה הראנו בכיתה. זו מטריצת מעבר של שרשרת סופית ובלתי פריקה. לכן יש לה וקטור הסתברויות סטציונריות יחיד. זו שרשרת לא מחזורית ולכן וקטור ההסתברויות הסטציונריות מייצג הסתברויות גבוליות של התהליך. בכיתה הראנו את הוקטור הזה. עד השישיה יש 2011 הפעלות של מטריצת המעבר. 2011 זהו מספר גדול. לכן ההסתברויות הגבוליות שוות בקירוב להסתברויות הסטציונריות. ההסתברות שבשישיה שמתחילה ב 2012, הראשון שבו נבקר יהיה 2014, שווה בקירוב לרכיב השלישי של הוקטור שהוא

$\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3.5}$. צריך גם לבקר ב 2016. המרחק מ 2014 עד ל 2016 הוא קצר. לכן אין לחשב הסתברות גבולית. צריך שלאחר ביקור ב 2014 לקבל תוצאה של 2 או פעמיים רצופות תוצאה של 1. הסיכוי לכך הוא $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$. בסך הכל ההסתברות של הצירוף הנדרש היא $\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3.5}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)$.

ב. אם בשישיה שמתחילה ב 1, הביקור הראשון מתפלג לפי ההתפלגות הסטציונרית של התהליך, אז הוא מתפלג לפי התפלגות שהיא נקודת שבת. לכן ההתפלגות בכל שישיה תהיה זהה להתפלגות הסטציונרית. את ההתפלגות הסטציונרית הראנו בכיתה. לפי התפלגות זו צריך להתקיים עבור כל $1\le k\le 6$: $P(X_0=k)=\frac{7-k}{6}\cdot\frac{1}{3.5}$. במקרה זה הסיכוי שהביקור הראשון החל מ 2012 יהיה ב 2014 הוא בדיוק $\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3.5}$. את ההסתברות שבהמשך לאחר ביקור ב 2014 ,נבקר ב 2016 חישבנו גם קודם בדיוק.

<u>שאלה 3</u>

מטריצת היוצר תסומן ב Λ . בתהליך פואסון מרחב המצבים הוא כל השלמים האי שליליים.
מכל מצב יש מעבר רק לטבעיים העוקבים לו.
עבור כל $i\ge 0$ מתקיים $\Lambda_{i,i+1}=\lambda$ ו $\Lambda_{i,i}=-\lambda$. יתר אברי היוצר הם אפסים.

מכל מצב בהכרח עוברים לטבעי הבא. לכן בכל שורה של מטריצת המעבר בזמני הקפיצות, יש רק איבר חיובי אחד. $P_{i,i+1}=1$.

שלומי