<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים/ תרגיל 4</u>

<u>שאלה 1</u>

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב המצבים השלמים $-\infty < i < +\infty$. מתקיים: $X_0 = 0$
ולכל $n \ge 0$: $X_{n+1} = X_n + b_n$, כאשר b_n הם משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים
$P(b_n = +3) = \frac{2}{5}$ ו $P(b_n = -2) = \frac{3}{5}$; זאת אומרת שבכל שלב בסכוי $\frac{2}{5}$ עושים שלושה
צעדים ימינה ובסכוי $\frac{3}{5}$ עושים שני צעדים שמאלה.

<u>א</u>. מהו המחזור של מצבי השרשרת ?

<u>ב</u>. הוכיחו שכל המצבים הם נשנים.

(<u>רמז</u>: תוכלו אם תרצו, להעזר בנוסחת סטרלינג: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.)

<u>שאלה 2</u>

תהי $X_1, X_2, X_3, \cdots$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים:

$P(X_i = 1) = \frac{2}{5}$, $P(X_i = 0) = \frac{3}{5}$ לכל $i \ge 1$. יהי $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$

נסתכל על הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ שהיא סדרת הממוצעים המצטברים של סדרת המשתנים
$X_1, X_2, X_3, \cdots$.

<u>א</u>. הראו שכל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$ יכול להתקבל בהסתברות חיובית כמנה $\frac{S_n}{n}$ עבור איזשהו n טבעי.

<u>ב</u>. הראו שלאחר שבשלב מסוים התקבל כמנה מספר רציונלי כלשהו בקטע $[0,1]$, אז לגבי כל מספר רציונלי $\frac{p_2}{q_2}$ שעבורו $0 < p_2 < q_2$, יש הסתברות חיובית שהוא יתקבל כמנה בשלב מאוחר יותר כלשהו.

<u>ג</u>. הראו שכל מספר רציונלי ששונה מ $\frac{2}{5}$ לא יתקבל כמנה אינסוף פעמים.

<u>ד</u>. הראו שהמנה $\frac{2}{5}$ תתקבל אינסוף פעמים בהסתברות 1 .

(<u>רמז</u>: תוכלו להסתמך על הטענה שהיה צריך להוכיח בסעיף ב' משאלה 1 וזאת גם אם לא הצלחתם להוכיח אותה.)

<u>ה</u>. הסבירו מדוע צירוף הטענות שהיה צריך להוכיח בסעיפים הקודמים לא היה יכול להתקיים אילו הסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ היתה שרשרת מרקוב.

<u>ו</u>. הוכיחו גם ללא הסתמכות על הסעיפים הקודמים שהסדרה $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ אינה שרשרת מרקוב.

המשך בעמוד הבא

<u>שאלה 3</u>

תהי $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ שרשרת מרקוב עם מצב התחלתי i. יהי Z הערך הגדול ביותר המתקבל על-ידי לפחות משתנה אחד שבסדרה.

כך למשל, אם $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא שרשרת בלתי פריקה על קבוצת המצבים 1 ו 2, אז עבור כל מצב התחלתי בהסתברות 1 מתקיים $(Z=2)$ כי בשרשרת בלתי פריקה סופית, עבור כל מצב התחלתי, בהסתברות 1 נגיע לכל מצב.

<u>א</u>. תנו דוגמא לשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ עם מצב התחלתי מתאים, כך ש $Z \sim U[1,3]$.

<u>ב</u>. תנו דוגמא לשרשרת $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ עם מצב התחלתי מתאים, כך ש $Z \sim G(0.5)$.

<u>ג</u>. תנו דוגמא לשרשרת בלתי פריקה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ עם מצב התחלתי מתאים, כך ש Z הוא בעל התפלגות גיאומטרית.
