פתרון תרגיל 4 במבוא לתהליכים סטוכסטיים

שאלה 1

א. כדי לחזור ממצב 0 למצב 0 , מספר הצעדים שמאלה צריך להיות שווה לארבע פעמים מספר הצעדים ימינה. לכן ניתן לחזור למצב 0 רק במספר צעדים שהוא כפולה של 5. ניתן לחזור למצב 0 ב 5 צעדים. לכן המחזור של מצב 0 הוא בדיוק 5. השרשרת היא אי-פריקה ובשרשרת אי פריקה לכל המצבים יש את אותו מחזור לכן המחזור של כל המצבים הוא 5.

ב. נשנות היא תכונה מחלקתית. מכיוון שהשרשרת היא אי-פריקה אז די להראות שמצב 0 הוא נשנה.

נשתמש בקריטריון לנשנות. נבדוק האם $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(n)} = \infty$. למעשה ניתן לחזור למצב 0 רק לאחר מספר צעדים שהוא כפולה של 5, לכן יש לבדוק אם מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}^{(5n)} = \infty$. מתקיים

$$P_{0,0}^{(3n)} = \binom{5n}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{4n} = \frac{(5n)!}{n!\cdot(4n)!}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{4n} \overset{stirling}{\cong} \frac{\sqrt{2\pi 5n}\left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}}{\sqrt{2\pi 4n}\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{4n}$$

ולזה יש סדר גודל של $\frac{1}{\sqrt{n}}$. מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ לכן מצב 0 הוא נשנה וכל המצבים בשרשרת הבלתי פריקה הם נשנים.

שאלה 2

א. הרציונלי $\frac{p}{q}$ יכול להתקבל לאחר q נסיונות שמתוכם ב p נסיונות יהיו הצלחות.

ב. נניח שלאחר q_1 נסיונות, הערך 1 התקבל p_1 פעמים. נראה שקיים n כך שבהסתברות חיובית, לאחר $q_2 \cdot 10^n$ נסיונות תתקבל המנה $\frac{p_2}{q_2}$. n יהיה תלוי ב q_1, p_1, q_2, p_2 :

נבחר n כך ש $q_2 \cdot 10^n \geq q_1$ וגם $p_2 \cdot 10^n \geq p_1$. המנה $\frac{p_2}{q_2}$ יכולה להתקבל לאחר שמתוך $q_2 \cdot 10^n - q_1$ הנסיונות שיבואו לאחר q_1 הנסיונות הראשונים, יתקבל הערך 1 ב $p_2 \cdot 10^n - p_1$ פעמים.

ג. על-פי החוק החזק של המספרים הגדולים, סדרת המנות $\frac{S_n}{n}$ שואפת ל $\frac{1}{5}$ ($\frac{1}{5}$ זה כאן התוחלת של כל אחד מהמשתנים הבלתי תלויים וחסומים). עבור כל $\varepsilon > 0$, מספר הפעמים שתתקבל מנה המרוחקת מ $\frac{1}{5}$ בלפחות ε הוא סופי. כל רציונלי $\frac{p}{q}$ ששונה מ $\frac{1}{5}$ מרוחק מ $\frac{1}{5}$ ב $\varepsilon = \left|\frac{1}{5} - \frac{p}{q}\right|$.

ד. הוכחנו בשאלה 1 שכאשר בכל שלב הולכים שלושה צעדים ימינה בסיכוי $\frac{1}{5}$ ושמאלה בסיכוי $\frac{4}{5}$, אז השרשרת היא נשנית. לכן חוזרים לנקודת ההתחלה ∞ פעמים. זאת אומרת ש ∞ פעמים תהיה

פרופרצית מספר הפעמים שהלכנו ימינה שווה בדיוק ל $\frac{1}{5}$. כך כאן עבור ∞ ערכי n תהיה

פרופורצית מספר המשתנים עד אליו שיקבלו את הערך 1 שווה ל $\frac{1}{5}$.

ה. לגבי שרשרת מרקוב הראנו בהרצאה, שנשנות היא תכונה מחלקתית, זאת אומרת שאם שני מצבים מקושרים אז אם אחד מהם הוא נשנה אז גם האחר הוא נשנה. כאן הראנו שיש השתלשלות שמובילה מכל מנה רציונלית בקטע הפתוח $(0,1)$ לכל מנה רציונלית בקטע זה. אך גם הראנו שהמנה $\frac{1}{4}$ מתקבלת אינסוף פעמים בזמן שכל מנה אחרת לא מתקבלת אינסוף פעמים.

ו. $P\left(\frac{S_3}{3}=\frac{2}{3} \mid \frac{S_2}{2}=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}>0$, $P\left(\frac{S_5}{5}=\frac{2}{3} \mid \frac{S_4}{4}=\frac{1}{2}\right)=0$ (מדובר בהסתברויות מותנות).

מכאן הסתברות המעבר תלויה בזמן ולא רק במצב: (אין הומוגניות בזמן).

שאלה 3

א. כן

כאשר השרשרת בלתי פריקה אז עבור כל זוג מצבים i, j קיים קבוע $a_{i,j}$ כך שניתן להגיע ממצב i למצב j ב $a_{i,j}$ צעדים. כאשר השרשרת לא מחזורית אז עבור כל מצב j קיים n_j כך שעבור כל $n \geq n_j$ מתקיים $P_{j,j}^{(n)} > 0$. נבחר קבוע N, כך ש $N=\max_{i,j}\{a_{i,j}\}+\max_{j}\{a_j\}$. עבור כל $n \geq N$, כל אברי המטריצה P^n הם חיובים (ניתן להגיע מכל מצב למצב j וגם לחזור ממנו אל עצמו.

ב. לא נתן דוגמא

שרשרת מרקוב שמרחב מצביה הוא כל השלמים ושבה מתקיים עבור כל $-\infty < i < +\infty$: $P_{i,i-1}=P_{i,i}=P_{i,i+1}=\frac{1}{3}$. מכל מצב יש מסלול לכל מצב אחר והמחזור של כל המצבים הוא 1 כי ניתן לשהות בכל מצב שני צעדים רצופים. אבל עבור כל n סופי, קיימים מצבים שאליהם לא ניתן להגיע, למשל ממצב 0 (כל המצבים המרוחקים ממנו ביותר מ n).

שאלה 4

א. לא יתכן.

מכל מצב $i > 0$ מוכרחים להגיע למצב 0 (תוך i צעדים).

ב. כן יתכן.

אם $P_{0,0} > 0$ אז ניתן להגיע ממצב 0 לעצמו בצעד אחד והוא לא מחזורי.

ג. כן יתכן.

אם $P_{0,2}=1$ ו $P_{1,0}=P_{2,1}=1$ אז אפשר (ואפילו מוכרחים) לחזור ממצב 0 לעצמו בשלושה צעדים. לכן המחזור לא גדול מ 3. לא ניתן לחזור למצב 0 מעצמו במספר שאינו כפולה של 3 של צעדים לכן המחזור הוא כפולה של 3.

ד. כן יתכן.

ממצב 8 יש מסלול למצב 0 (בשמונה צעדים). אם ממצב 0 עוברים רק למצבים בעלי אינדקס נמוך מ 8 אז אין דרך חזרה ממצב 0 למצב 8 ולכן מצב 8 אינו ארגודי ולכן הוא חולף.

המשך בעמוד הבא

<u>שאלה 5</u>

היא בהכרח בלתי פריקה ולא מחזורית.
נסתכל על אחת מהשרשרות המקוריות. היא בלתי פריקה כי ניתן יש מסלול מכל מצב לכל מצב. היא לא מחזורית וזה אומר שלגבי כל מצב, המחלק המשותף המכסימלי של אורכי המסלולים שבהם ניתן לחזור למצב מעצמו, הוא 1. בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא $\frac{1}{2}(P+Q)$, כל איבר i, j הוא חיובי, אם האיבר ה i, j הוא חיובי באחת המטריצות המקוריות. לכן בשרשרת שמטריצת המעבר שלה היא $\frac{1}{2}(P+Q)$ לגבי כל מצב, כל המסלולים שהיו אפשריים ממנו ואליו בשרשרות המקוריות, הן אפשריות גם בה.

שלומי