<u>פתרון תרגיל 2 במבוא לתהליכים סטוכסטיים</u>

<u>שאלה 1</u>

אם $P(X_1 = 7) = a > 0$ אז $P(A_n) = a$ עבור כל $1 \le n < \infty$ כאשר A_n ב"ת ולכן לפי הלמה של בורל קנטלי בהכרח יתרחשו ∞ מאורעות A_n. אם $P(X_1 = 7) = 0$ אז $P(A_n) = 0$ עבור כל $1 \le n < \infty$ ואז בהסתברות 1 לא יתרחש אף מאורע A_n. לכן בשום מקרה אין הסתברות חיובית לקבלת בדיוק 8 מאורעות A_n.

<u>שאלה 2</u>

מספר באורך n ספרות הוא מחוק בהסתברות p^n. יש 2^{n-1} מספרים בעלי n ספרות. יהי A_m המאורע שהמספר ה- m בשורה יהיה מחוק. מתקיים $\sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} p^n$ כאשר המאורעות A_m הם ב"ת.

יהיו ∞ מספרים מחוקים אם"ם טור זה מסתכם ב ∞. טור זה מסתכם ב ∞ אם"ם $p \ge 0.5$.

מספר באורך n אינו מחוק בסיכוי $1 - p^n$ מתקיים $1 - p^n \ge 1 - p$. עבור כל $p < 1$ מתקיים $\sum_{m=1}^{\infty} 1 - p = \infty$. לכן הודות לאי תלות, עבור כל $p < 1$ יהיו ∞ מספרים לא מחוקים.

ברור שעבור $p = 1$ לא יהיה אף מספר לא מחוק.

<u>שאלה 3</u>

עבור כל $2 \le n < \infty$ נגדיר מאורע A_n שבשלב ה- n נהיה באותו מקום כמו בשלב ה- $n-2$.

מתקיים $P(A_n) = 2 \cdot 0.8 \cdot 0.2$ (צעד אחד ימינה וצעד אחד שמאלה כאשר לא חשוב הסדר).

נשים לב ש A_n תלוי ב A_{n-1} כי אם A_{n-1} התרחש זה אומר שבמהלכים $n-2$ ו $n-1$ הלכנו בכיוונים שונים ואז ההסתברות המותנה שהמהלך ה- $n-1$ הוא ימינה היא 0.5 ולא 0.8 וזה משנה את ההסתברות שבפעם ה- n נחזור לאותו מקום שבו היינו בפעם ה- $n-2$.

איך נתגבר על זה: נסתכל על קבוצת המאורעות $\{A_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$. כעת על כל מאורע משפיעים מהלכים אחרים מאשר על המאורעות האחרים. עבור כל $1 \le n < \infty$ מתקיים $P(A_{2n}) = 2 \cdot 0.8 \cdot 0.2$. מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = \infty$ והודות לזה ולאי תלות, מתרחשים ∞ מאורעות.

<u>הערה</u>: יכולנו לפתור גם בהסתמך על הגרסא של הלמה של בורל קנטלי שמדברת על כך שכל מאורע תלוי בלכל היותר מספר סופי קבוע של מאורעות. כאן הקבוע הוא 2.

המשך בעמוד הבא

<u>שאלה 4</u>

<u>א</u>. כן

מספיק ש $P_{2,3} = P_{1,3}$ כדי שבלי שום קשר לעבר ולזהותה של התקופה, סיכויי המעבר ממצב a למצב b יהיו שווים ל $P_{1,3}$.

<u>ב</u>. כן

מספיק ש $P_{1,1} / P_{1,2} = P_{2,1} / P_{2,2} = P_{3,1} / P_{3,2}$ כדי שבלי שום קשר לעבר ולזהות התקופה, בהינתן שאנו במצב a אז ההסתברות שאנו למעשה במצב 1 היא $\dfrac{P_{1,1}}{P_{1,1}+P_{1,2}} = \dfrac{P_{2,1}}{P_{2,1}+P_{2,2}} = \dfrac{P_{3,1}}{P_{3,1}+P_{3,2}}$

וההסתברות שאנו למעשה במצב 2 היא $\dfrac{P_{1,2}}{P_{1,1}+P_{1,2}} = \dfrac{P_{2,2}}{P_{2,1}+P_{2,2}} = \dfrac{P_{3,2}}{P_{3,1}+P_{3,2}}$.

כך ההסתברות לעבור ממצב a למצב b היא $\dfrac{P_{1,1}}{P_{1,1}+P_{1,2}} P_{1,3} + \dfrac{P_{1,2}}{P_{1,1}+P_{1,2}} P_{2,3}$.

נוסיף את התנאי שבשלב ההתחלתי אנו במצב b, כך בכל שלב שאנו במצב a, אנו למעשה במצב 1 בסיכוי $\dfrac{P_{1,1}}{P_{1,1}+P_{1,2}}$.

דוגמא למטריצת מעבר שעונה על הדרישות היא: $\begin{pmatrix} 0.62 & 0.31 & 0.07 \\ 0.42 & 0.21 & 0.37 \\ 0.22 & 0.11 & 0.67 \end{pmatrix}$

שלומי