

פתרון לבחינה מ 19.07.24

שאלה 1

התשובה היא א'.

לגבי יום נתון, ההסתברות שלא יהיה לאף תושב יום הולדת בו היא $\left(1 - \frac{1}{365}\right)^{365}$. אז התוחלת של האינדיקטור שביום נתון לא יהיה לאף אחד יום הולדת. מכיון שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות, אז תוחלת מספר ימי השנה שבהם לא יהיה לאף אחד יום הולדת היא $365 \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{365}$. שווה בקירוב ל $\frac{1}{e}$.

שאלה 2

התשובה היא ד' (הסתברות אפסית).

כדי שכל מאה הכדורים יכנסו לתאים שונים, צריך שחמישים הכדורים הראשונים יכנסו כל אחד לתא שונה, ואף אחד מחמישים האחרונים לא יכנס לחמישים התאים שאליהם נכנסו הראשונים. זהו תנאי הכרחי לכך שכל כדור יכנס לכד שונה. (זהו לא תנאי מספיק לכך). בהינתן שחמישים הראשונים נכנסו לחמישים תאים שונים, יש לכל אחד מחמישים האחרונים סיכוי של $\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$ לא להכנס לחמישים התאים של הראשונים. הסיכוי שאף אחד מהאחרונים לא יכנס להם הוא $\left(\frac{3}{4}\right)^{50}$ שהוא מספר קטן מאוד.

שאלה 3

התשובה היא ג' (בקירוב שמינית).

משתנה $\exp(100)$ מקבל ערך גדול או שווה לאחד בסיכו e^{-100} שהיא קטנה מאוד. לכן המשתנה המעריכי גדול מהבינומי רק אם הבינומי מקבל את הערך אפס. הבינומי מקבל את הערך אפס בסיכו $(1 - 0.5)^3$.

שאלה 4

התשובה היא ג' (רבע).

$$P(X < Y) = \int_0^1 f_Y(y)P(X < y^3) = \int_0^1 y^3 dy$$

שאלה 5

התשובה היא ב'.

בכל יום שעד אליו אף איש לא קיבל תוצאה גדולה מארבע, יש אותו סיכוי קבוע שבו לפחות אחד האנשים יקבל ערך כזה. יש גם אי תלות בין הימים השונים.

שאלה 6

התשובה היא ב' (שביעית)

צריך לבחור שניים מבין המספרים 1,5,7. הסיכוי הוא $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}$.

שאלה 7

התשובה היא ב'.

השונות של משתנה $Bin(n, p)$ היא $np(1-p)$. $p(1-p)$ שואף לאפס כאשר p שואף לאפס, ושווה לרבע כאשר p מקבל ערך חצי. $p(1-p)$ הוא רציף, ולכן מקבל כל ערך בקטע החצי פתוח שבין אפס לרבע. עבור כל ערך ממשי a של שונות, נבחר n שגדול מ $4a$, ויש p כך שהשונות של המשתנה שווה ל a . למשתנה היפרגאומטרי יש שלושה פרמטרים טבעיים. השונות שלו היא תמיד מספר רציונלי.

שאלה 8

התשובה היא ג'.

מתקיים $E(X) = P(X=0) \cdot 0 + P(X>0)E(X|X>0)$.
לכן מתקיים $E(X|X>0) = \frac{1}{1-e^{-1}}$ $1 = (1-e^{-1})E(X|X>0)$ לכן מתקיים

שאלה 9

התשובה היא ד'.

אם למשל כל המשתנים בעלי אינדקס אי זוגי הם העתק של המשתנה הראשון, אז הממוצע יתקרב לגודל שאינו ידוע מראש (גודל שנקבע על פי הערך שמקבל המשתנה הראשון). על סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות וב"ת חל החוק החלש. אם יש אין סוף משתנים שתלויים באחרים, והאחוז המצטבר שלהם שואף לאפס כאשר מספר המשתנים שואף לאינסוף, אז ההשפעה שלהם על הממוצע שואפת לאפס.

שאלה 10

התשובה היא ב'.

כל הטלה שמגיעים אליה היא אחרונה, אם היא הצלחה, ואין מטבע נוסף שבו צריך לבצע הטלות. כל הטלה שהגענו אליה היא אחרונה בסיכוי ab .

הערות

כפי שהובהר, לא מדובר כאן בסיפור הטריטוריאלי של סכום של מספר קבוע של משתנים גיאומטריים ב"ת שמתפלג בינומית שלילית. מספר המשתנים הגיאומטריים שנסכמים הוא עצמו משתנה גיאומטרי ולא קבוע.

שאלה 11

לכל אחד מהאינדיקטורים יש תוחלת של $\frac{1}{9}$. מכפלת האינדיקטורים היא אינדיקטור. לכן תוחלתה שווה להסתברות שלשניהם יש הצלחה. להודל יש הצלחה בסיכוי $\frac{1}{9}$, ואם להודל יש הצלחה, אז לסון יש הצלחה בסיכוי $\frac{1}{8}$. לכן השונוות המשותפת שווה ל $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}$.
