

## פתרון לבחינה מ 19.05.24

### שאלה 1

ד' ( שביעית )

יש חמישה מקומות שבהם הרצף יכול להתחיל. תוחלת מספר ההופעות שווה לסכום התוחלות של חמישה אינדיקטורים. התוחלת של אינדיקטור שווה להסתברות שהוא מקבל את הערך אחד. כאן התוחלת של כל אינדיקטור היא  $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{8}$ .

### שאלה 2

ד' ( לא הרבה פחות משביעית )

נחשב את הסתברות האיחוד של חמישה מאורעות שמייצגים רצפים במקומות מסוימים. רק החיתוך בין רצף בארבעת המקומות הראשונים ורצף בארבעת המקומות האחרונים הוא אפשרי. לפי עקרון ההכלה וההפרדה הסתברות האיחוד שווה ל

$$5 \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} - \frac{4}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

### שאלה 3

א' ( ארבע עשרה חלקי חמש עשרה )

המשלים של המאורע הוא ששתי תוצאות הארבע יופיעו לפני כל תוצאות השתיים.

$$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4+2}{2}} \text{ או } \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}$$

### שאלה 4

ד' ( שתיים חלקי אחת עשרה )

בסיכוי עשר חלקי אחת עשרה החזקות ישאפו לאפס ( אם המשתנה המקורי יקבל ערך קטן מאחד ) ובסיכוי אחד חלק אחד עשרה החזקות ישאפו לאין סוף ( אם המשתנה המקורי יקבל ערך גדול מאחד ). ההסתברות שהמינימום יקבל את הערך שתיים תשאף לאחד חלקי אחת עשרה.

### שאלה 5

א'

לכל משבצת יש אותה הסתברות ( חצי ) להיות כחולה, וזאת באופן ב"ת במשבצות אחרות. סכום של אינדיקטורים ב"ת שווה הסתברות מתפלג בינומית.

### שאלה 6

א'

לכל שורה יש אותה הסתברות (  $0.5^m$  ) להיות כולה כחולה, וזאת באופן ב"ת בשורות האחרות.

## שאלה 7

ד'

תוחלת מספר השורות שצבועות רק בכחול היא  $n \cdot 0.5^m$ . ( כסכום תוחלות של אינדיקטורים ).  
מאותו שיקול תוחלת מספר העמודות שצבועות רק בכחול היא  $m \cdot 0.5^n$ .  
קיימים  $n, m$  כך ש  $n \cdot 0.5^m > 1$ . אבל זה אפשרי רק אם  $n \geq m$  ( זהו תנאי הכרחי אבל לא מספיק לכך ש  $n \cdot 0.5^m > 1$  ). אם תנאי זה מתקיים אז לא יתכן שיתקיים  $m \cdot 0.5^n$ .

המשתנים הם תלויים. מתקיים למשל  $P(Y = m | X = n) = 1 \neq P(Y = m)$ ,  
( אם בכל השורות כל המשבצות צבועות בכחול, אז כל המשבצות שבטבלה צבועות בכחול,  
ואז גם בכל העמודות כל המשבצות צבועות בכחול ).  
קיום משבצות משותפות לשורות ולעמודות גורם לתלות.

## שאלה 8

ד'

למעשה ידוע שהמשתנה מקבל רק ערכים גדולים או שווים לעשרים או את הערך אפס.  
לפי אי שיוויון מרקוב נקבל  $P(X \geq 10) = P(X \geq 20) \leq \frac{E(X)}{20} = \frac{1}{20}$ .  
לא ניתן לקבל חסם טוב יותר: קיים משתנה בעל תוחלת ששווה לאחד שמקבל את הערך עשרים בסיכוי אחד חלקי עשרים, ואחרת את הערך אפס.

## שאלה 9

א'

נראה שבשני המקרים עבור כל משתנה מעריכי, קיימים משתנים מקריים אחידים מתאימים, כך שהתכונה תתקיים.

קיימת נקודה חיובית  $z$  שבה פונקציית ההסתברות המצטברת של משתנה מעריכי שווה ל  $0.1$ . נתייחס למשתנה מקרי אחיד בקטע שבין אפס ל  $z$ . משתנה זה מקבל בהסתברות אחת ערך קטן מ  $z$ . המשתנה המעריכי מקבל בהסתברות  $0.9 = 1 - 0.1$  ערך גדול מ  $z$ .

פונקציית ההסתברות המצטברת של משתנה מעריכי שואפת לאחד כאשר שואפים לאין סוף.  
( זו תכונה של כל משתנה ). לכן קיימת נקודה  $t$  שבה פונקציית ההסתברות המצטברת שווה ל  $0.9$ . קיים משתנה מקרי אחיד שמקבל ערכים רק מימין לנקודה זאת. לכן הוא תמיד גדול מ  $t$ , בזמן שהמשתנה המעריכי מקבל ערך קטן מ  $t$  בסיכוי  $0.9$ .

## שאלה 10

ב' ( תשע חלקי ששים וארבע )

הטלה היא אחרונה בהינתן שהגענו אליה, אם מתקיימים שני תנאים: תתקבל בה תוצאה זוגית ( קורה בסיכוי חצי ) והיא מוטלת בקוביה הכחולה האחרונה ( קורה בסיכוי חצי ). לכן כל הטלה שנגיע אליה היא אחרונה בסיכוי רבע באופן ב"ת בהטלות האחרות. מספר

ההטלות של קוביות כחולות מתפלג  $G\left(\frac{1}{4}\right)$ . הערך שלוש מתקבל בסיכוי  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4}$ .

## שאלה 11

חצי

במאתיים ההטלות שלא כוללות את ההטלה האחרונה של הודל, יש שיוויון בין הודל לארדילס באיזשהו סיכוי  $b$ . משיקולי סימטריה יש בהטלות אלה יתרון להודל באותו סיכוי כמו יתרון לארדילס. לכן לכל אחד מהם יש יתרון בסיכוי  $\frac{1-b}{2}$ . אם אדילס מוביל בהן, אז הודל לא יכול להיות ביתרון גם לאחר ההטלה האחרונה שלו. אם יש שיוויון בהן, אז הודל יוביל בסיכוי חצי לאחר ההטלה הנוספת. אם הודל כבר מוביל בהן, אז בודאי שהוא יוביל גם לאחר ההטלה האחרונה. לכן הודל יוביל לאחר 201 הטלות בסיכוי

$$\frac{1-b}{2} \cdot 0 + 0.5b + \frac{1-b}{2} \cdot 1 = 0.5$$

---