

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

1. ענו על 10 השאלות הבאות.
2. בראש כל תשובה יש לרשום תשובה סופית שהיא אחת מחמשת האפשרויות הניתנות. מייד אחרי זה יש לרשום נימוק.
3. ענו על השאלות רק במחברות. טפסי השאלון לא יבדקו.
4. משקל כל שאלה הוא 10 נקודות.
5. על תשובה סופית שגויה עם הסבר לא מושלם, ינתן ניקוד חלקי. על תשובה סופית נכונה ללא הסבר מתאים, לא ינתן ניקוד.
6. הצובר N נקודות יקבל ציון ששווה ל $\min\{N + 3, 100\}$.
7. אין להשתמש בספרים ובמחברות. ניתן להשתמש בשלושה דפי עזר דו-צדדיים ובמחשבון שלא ניתן לתכנות.
8. לרשותכם 3 שעות.
9. שאלה 11 מיועדת רק לקבוצת 28 של אנשי המילואים. זו שאלה פתוחה, בה אין בחירה באפשרות נכונה. משקל שאלה זו הוא 10 נקודות.

בהצלחה !

נתונים אלה מתייחסים לשאלות 1,2,3.
 מסדרים מחדש באקראי את שמונת הספרות של המספר 20242024, כך שכל הסידורים של שמונת הספרות הם שווי הסתברות.

שאלה 1

מהי תוחלת מספר ההופעות של הרצף 2024 ?

- א. יותר מחצי
- ב. בין רבע לחצי
- ג. בין ששית לרבע
- ד. בין שמינית לששית
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 2

מהי ההסתברות שהרצף 2024 יופיע לפחות פעם אחת ?

- א. יותר מחצי
- ב. בין רבע לחצי
- ג. בין ששית לרבע
- ד. בין שמינית לששית
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 3

מהי ההסתברות שבסידור האקראי שנוצר תהיה קיימת תת הסדרה 2,4 ?
 (זאת אומרת שלפחות פעם אחת יופיע 4 אחרי 2 לאו דוקא ברצף).

- א. יותר משש שביעיות
- ב. בין חמש שביעיות לשש שביעיות
- ג. בין ארבע שביעיות לחמש שביעיות
- ד. בין שלוש שביעיות לארבע שביעיות
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 4

יהי $X \sim U(0,1)$ (אחיד רציף בין אפס ל 1.1). יהי $Y_n = X^n$ (החזקה ה- n של X).
 יהי $W_n = \min\{Y_n, 2\}$.
 מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} E(W_n)$.

- א. גדול מאחד וחצי
- ב. גדול מאחד וקטן מאחד וחצי
- ג. בין חצי לאחד
- ד. גדול מאפס וקטן מחצי
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

נתונים אלה מתייחסים לשאלות 5,6,7.
 נתונה טבלה בת n שורות ו m עמודות. נניח שמתקיים $n \geq 2, m \geq 2$. צובעים את כל אחת מ nm המשבצות בסיכוי שווה בכחול או בירוק, וזאת באופן ב"ת בצביעת המשבצות האחרות.

שאלה 5

מספר המשבצות שצבועות בכחול מתפלג

- א. בינומית
- ב. כסכום של אינדיקטורים ב"ת שאינם שווי הסתברות
- ג. כסכום של אינדיקטורים ב"ת שווי הסתברות, אבל לא בינומית
- ד. כסכום של אינדיקטורים תלויים
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 6

מספר השורות שבהן כל המשבצות צבועות בכחול מתפלג

- א. בינומית
- ב. כסכום של אינדיקטורים ב"ת שאינם שווי הסתברות
- ג. כסכום של אינדיקטורים ב"ת שווי הסתברות, אבל לא בינומית
- ד. כסכום של אינדיקטורים תלויים
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 7

יהי X משתנה מקרי שמייצג את מספר השורות שבהן כל המשבצות צבועות בכחול.
 יהי Y משתנה מקרי שמייצג את מספר העמודות שבהן כל המשבצות צבועות בכחול.

- א. זוג המשתנים המקריים X, Y הם ב"ת.
- ב. מתקיים $E(X) < 1$ עבור כל זוג ערכים n, m .
- ג. יתכן שיתקיים $E(Y) > E(X) > 1$.
- ד. יתכן שיתקיים $E(X) > 1$, אבל אפשרות ג' לא נכונה.
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 8

נתון משתנה מקרי X . נניח שמתקיים $E(X) = 1$ וגם מתקיים $P(0 < X < 20) = 0$ ו $P(X < 0) = 0$.
 מהו החסם העליון הקטן ביותר שניתן למצוא עבור $P(X \geq 10)$?

- א. אפס
- ב. אחד
- ג. עשירית
- ד. אחד חלקי עשרים
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 9

טענה א': קיימים זוג משתנים מקריים X, Y כך ש X מתפלג אחיד רציף ומקבל רק ערכים חיוביים ו Y מתפלג מעריכית, ומתקיים $P(Y > X) > 0.9$.

טענה ב': קיימים זוג משתנים מקריים X, Y כך ש X מתפלג אחיד רציף ומקבל רק ערכים חיוביים ו Y מתפלג מעריכית, ומתקיים $P(X > Y) > 0.9$.

- א. טענה א' נכונה וטענה ב' נכונה.
- ב. טענה א' נכונה וטענה ב' לא נכונה.
- ג. טענה א' לא נכונה וטענה ב' נכונה.
- ד. טענה א' לא נכונה וטענה ב' לא נכונה.
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 10

מבצעים סדרת הטלות ב"ת של קוביה ירוקה תקינה עד קבלת תוצאה זוגית. יהי T משתנה מקרי שסופר את מספר ההטלות שבוצעו בקוביה הירוקה עד וכולל קבלת תוצאה זוגית. בשלב הבא יוצרים אוסף של קוביות כחולות תקינות. מספר הקוביות הכחולות שבאוסף שווה לערך שקיבל המשתנה T . בכל אחת מהקוביות הכחולות שבאוסף מבצעים סדרת הטלות עד שמתקבלת בה עצמה תוצאה זוגית. כל ההטלות של הקוביות הכחולות הן ב"ת. מהי ההסתברות שנבצע בסך הכל בדיוק שלוש הטלות בקוביות הכחולות ?

- א. גדולה מרבע
- ב. בין שמינית לרבע
- ג. בין אחד חלקי שש עשרה לשמינית
- ד. פחות מאחד חלקי שש עשרה
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 11

(רק חברי קבוצה 28 של אנשי המילואים רשאים לענות על שאלה זו). גלן הודל מבצע סדרה של 101 הטלות של קוביה תקינה. אוסבלדו ארדילס מבצע סדרה של 100 הטלות של קוביה תקינה. קבוצת כל $101 + 100 = 201$ הטלות הן ב"ת.

מהי ההסתברות שמספר הפעמים שגלן הודל יקבל תוצאה זוגית, יהיה גדול ממספר הפעמים שאוסבלדו ארדילס יקבל תוצאה זוגית ?