

פתרון לבחינה מ 07.04.24

שאלה 1

א (חצי)

צריך שסכום שתי צלעות סמוכות יהיה זוגי. בהינתן כל ערך שמקבלת אחת מהן, השניה משלימה אותה לסכום זוגי בסיכוי חצי.

הערות

לסכומים אפשריים שונים אין אותה הסתברות. למשל, הסכום ארבע מתקבל רק אם כל הצלעות הן באורך אחד. לגבי סכומים אחרים, יש יותר צירופים שמסתכמים בהם. השאלה דומה לשאלה על חישוב ההסתברות למספר זוגי של הצלחות בסדרת נסיונות ב"ת שללפחות אחד מהם יש הסתברות חצי.

שאלה 2

ד (1.2)

לכל אחד מארבעת המשתנים יש תוחלת חצי. תוחלת הסכום של כל הארבעה שווה לסכום התוחלות שהוא שתיים. מזה צריך להוריד את תוחלת המכסימלי. פונקציית ההסתברות המצטברת של המכסימום עבור $0 \leq x \leq 1$ היא x^4 (הסיכוי שכל ארבעת המשתנים יהיו לא גדולים מערך זה). לכן הצפיפות של המכסימום היא $4x^3$, והתוחלת שלו היא $\int_0^1 4x^3 x dx = 0.8$.

הערה

למשתנה שידוע לגביו שאינו המכסימלי, יש תוחלת מותנה שקטנה מהתוחלת המקורית שלו. לכן, בהינתן שמשתנה מסוים לא קיבל את הערך המכסימלי, התוחלת שלו קטנה מחצי.

שאלה 3

ד (1.5)

לכל אחד מארבעת המשתנים יש הסתברות של חצי להחשב. אם הוא נחשב אז התוחלת המותנה שלו היא שלושה רבעים. בהינתן ש y משתנים נחשבים, אז תוחלת סכום הנחשבים היא $0.75y$. התוחלת של מספר הנחשבים היא 2.

בדרך נוספת: $4 \left(\int_0^{0.5} 0 dx + \int_{0.5}^1 x dx \right)$

שאלה 4

ב (חמש חלקי שתיים עשרה או חמש עשרה חלקי שלושים ושש).

דרך ראשונה

המשלים של המאורע הוא ששלוש פעמים תתקבל אותה תוצאה או שכל פעם תתקבל תוצאה אחרת. ההסתברות ששלוש פעמים תתקבל תוצאה זהה היא $\frac{1}{36}$. ההסתברות שכל

פעם תתקבל תוצאה אחרת היא $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$.

דרך שניה

אפשר גם לפתור את השאלה ישירות ללא שימוש במשלים.
ההסתברות היא $\frac{6 \cdot 5 \cdot 3}{6^3}$ (ראשית בוחרים שני מספרים שונים שאחד מהם יופיע פעמיים והאחר פעם אחת. הגורם 3 מייצג את בחירת מיקום התוצאה שתופיע פעם אחת).

שאלה 5

ה (בקירוב $\frac{1}{2e}$)

ההסתברות שהצלע שאורכה מתפלג מעריכית יהיה בעל אורך לפחות 10 היא e^{-10} שהיא אפסית. הצלע שאורכה מתפלג אחיד תהיה באורך של לפחות 10 בסיכוי חצי. הצלע שאורכה מתפלג מעריכית תהיה באורך של לפחות 1 בסיכוי e^{-1} .

שאלה 6

ב

התוחלת של המשתנה המקורי היא $\int_1^\infty \frac{2}{x^3} dx$ ששווה ל 2. החלק השלם קטן מהערך המקורי, לכן תוחלתו קטנה מ 2. החלק השברי מקבל ערכים בין אפס לאחד. הצפיפות של המשתנה המקורי היא מונוטונית יורדת. בכל קטע שבין שני שלמים עוקבים הצפיפות גדולה יותר בחצי הראשון שלו מאשר בחצי השני שלו. לכן לחלק השברי יש תוחלת קטנה מחצי.

שאלה 7

ד (חמש חלקי שש עשרה)

לגבי כל צומת, נוגעות בו רק קשתות כחולות בסיכוי $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$. תוחלת סכום האינדיקטורים שווה לסכום התוחלות שלהם.

שאלה 8

ב

יתכן שיתקיים למשל $P(X = 2, Y = 1) = P(X = 3, Y = 2) = P(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{3}$ ואז כל אחד מהמשתנים הוא בעל אותה התפלגות אחידה, אך $P(X > Y) = \frac{2}{3}$. למשתנים שווי התפלגות יש אותה חוקיות ואותה פונקציית הסתברות ולכן גם אותה תוחלת. פונקציית ההסתברות קובעת את התוחלת.

שאלה 9

א (אם המאורעות הם זרים)

אם המאורעות הם זרים, אז לא יכול להתרחש יותר ממאורע אחד. מתרחשים אפס או אחד מאורעות. לכן המשתנה שסופר את מספר המאורעות שהתרחשו, הוא עצמו משתנה שמקבל רק את הערכים אפס או אחד.

למשתנה שמקבל רק את הערכים אפס או אחד לא יכולה להיות שונות גדולה מרבע. בכל אחד מהסעיפים ב', ג', ד' ניתן לבנות דוגמה של משתנים ששונות הסכום שלהם גדולה מרבע. למקרים של ב"ת או של סכום הסתברויות קטן מאחד נתן דוגמה ש ב"ת בעלי הסתברות $0.2 < 0.25 < 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.4$.

למקרה של שונות משותפות שליליות נתן דוגמא שלכל מאורע יש הסתברות 0.3 ולחיתוך של כל שני מאורעות יש הסתברות 0.08. כך השונות המשותפת של זוג משתנים היא $-0.01 = 0.3 \cdot 0.3 - 0.08$. שונות הסכום היא $0.25 > (-0.01) \cdot 2 \binom{4}{2} = 0.3 \cdot 0.3 - 0.08$. ניתן לממש את ההתפלגות הזאת כך: לחיתוך של כל ארבעת המאורעות יש הסתברות 0.08, ולגבי כל אחד מארבעת המאורעות יש הסתברות 0.22 שרק הוא יתרחש.

שאלה 10

א

נתאר סדרת משתנים ב"ת כאלה:

$$P\left(X_n = -1 + \frac{1}{2n}\right) = P\left(X_n = 1 - \frac{1}{2n}\right) = 0.5 \quad \text{לכל } n \geq 1 \text{ מתקיים}$$

סדרת השונות היא עולה, אבל תמיד השונות קטנה מ 1. שונות הסכום של m המשתנים הראשונים קטנה מ m . יהי S_m סכום m המשתנים הראשונים. מתקיים $V\left(\frac{S_m}{m}\right) < \frac{m}{m^2} = \frac{1}{m}$. עבור $\varepsilon > 0$ נתון מתקיים לפי אי שיוויון צ'בישב $P\left(\left|\frac{S_m}{m}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{m\varepsilon^2}$. הסתברות זו שואפת לאפס.

לגבי סדרה של משתנים תלויים נוכל להגריל בסיכוי שווה בין הסדרה הב"ת שתיארנו לבין הסדרה שבה כל המשתנים מקבלים את הערך אפס. בשני המקרים ההסתברות שהממוצע סוטה מאפס ביותר מ ε נתון שואפת לאפס. כמוכן סדרת השונות היא עולה (התוחלות הן כולן אפס והתוחלות של ריבועי המשתנים הם עולים). המשתנים הם תלויים למשל כי אם אחד מהם שווה לאפס, אז כולם שווים לאפס, למרות שמראש הם כמובן לא חייבים להיות שווים לאפס.

שאלה 11

$$P(X = 0, Y = 0) = P(X = -1, Y = 1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{3} \quad \text{נניח שמתקיים}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

המשתנה X סימטרי סביב אפס, ולכן תוחלתו היא אפס.

$$E(XY) = \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = 0 \quad \text{מתקיים}$$

$$P(X = 0|Y = 1) = 0 \neq P(X = 0) \quad \text{המשתנים הם תלויים כי למשל}$$