

פתרון לבחינה מ 09.06.23

שאלה 1

התשובה היא ד'.

לפי משפט פיתגורס, ריבוע המרחק מהקודקוד שווה לסכום ריבועי המרחקים משתי צלעות.

המרחק מכל צלע מתפלג $U(0,1)$ ותוחלת הריבוע שלו היא $\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx$.

שאלה 2

התשובה היא ב' (π).

התוחלת שווה לסכום התוחלות של ארבעה אינדיקטורים, שכל אחד מהם מייצג מאורע שהמרחק של קודקוד מסוים קטן מ 1. הסיכוי של הנקודה להיות במרחק קטן מ 1 שווה לשטח של רבע עיגול שהוא $\frac{\pi}{4}$ חלקי שטח הריבוע שהוא 1.

שאלה 3

התשובה היא ג' (1).

זו תוחלת של משתנה מנוון שמקבל רק את הערך 1. בהסתברות אחת כל המרחקים הם שונים. אם כל המרחקים הם שונים, אז יש קודקוד אחד שרחוק יותר מאשר בדיוק שני קודקודים.

שאלה 4

התשובה היא א'.

בהטלה הראשונה לא יכול להתקבל רצף כזה. אחרי ההטלה הראשונה, יש בכל מקום סיכוי של ששית לרצף כזה, וזאת באופן ב"ת במקומות האחרים (כי כל התוצאות הן שוות הסתברות). התוחלת שווה לקבוע אחד של ההטלה הראשונה ועוד תוחלת של משתנה גיאומטרי בעל פרמטר ששית.

שאלה 5

התשובה היא ה' (0.6).

רצף של כדורים מאותו צבע, יכול להיות של כדורים כחולים או ירוקים, ויכול להיות בכל אחד משני הכדים (סך הכל $2^2 = 4$ אפשרויות). ההסתברות לרצף של n כדורים כחולים בכד הראשון היא $0.5 \cdot \left(\frac{3}{3+2}\right)^n$. כאשר $n \rightarrow \infty$ היחס בין ההסתברות לאפשרות זו לבין ההסתברויות לשלושת האפשרויות האחרות, שואף לאין סוף. לכן ההסתברויות שואפות להסתברות שדרוש עוד כדור כחול בכד הראשון.

שאלה 6

התשובה היא ג'.

אם ההתפלגות היא $Bin(3, 0.99)$, אז המשתנה סופר את מספר ההצלחות בשלושה נסיונות ב"ת, שבכל אחד מהם יש סיכוי של 0.99 להצלחה. מכיון שההסתברות לכשלון בכל אחד מהנסיונות היא 0.01 והסתברות איחוד לא גדולה מסכום ההסתברויות, אז ההסתברות שיהיה לפחות כשלון אחד אינה גדולה מ-0.03. כך ההסתברות שנקבל את הערך 3 היא לפחות 0.97 (למעשה יותר).

אם $X \sim Bin(6, 0.999)$ אז בסיכוי גבוה מאוד המשתנה מקבל את הערך 6 ואז הוא גם זוגי וגם כפולה של 3. אבל אם הוא לא זוגי אז כנראה מתקבל הערך 5, ואז הוא גם לא כפולה של 3. לכן המאורעות הם תלויים במקרה זה.

שאלה 7

התשובה היא ב'.

אם ההתפלגות היא $U[2, 3]$, אז כל אחד מהסיכויים שווה לחצי.

אם $b - a = 1$ אז $P(A) = 0.5 \geq P(B)$. אם $b - a = 2$ אז $P(A) \geq \frac{1}{3} = P(B)$.

אם $b - a = 3$ אז $P(A) = 0.5 \geq P(B)$. אם $b - a = 4$ אז $P(A) \geq \frac{2}{5} \geq P(B)$.

אם $b - a > 4$ אז $P(A) \geq \frac{3}{7} \geq P(B)$.

שאלה 8

התשובה היא ג'.

יש לבחור עבור הצלחה שתי נקודות מתוך עשר נקודות של מרחב המדגם.

יש לכך $\binom{10}{2} = 45$ אפשרויות.

שאלה 9

התשובה היא ג'.

עבור ערכי n גדולים, פונקציות ההסתברות של משתנים פואסונים יורדת דרסטית.

ההסתברות המותנה שהם יקבלו את הערך $n + 1$ שואפת ל-1. אם באמת שניהם מקבלים את הערך $n + 1$ אז צריך שהמשתנה הגיאומטרי גם יקבל את הערך הזה. בגלל תכונת חוסר הזכרון שלו, ההסתברות הזאת היא חצי.

שאלה 10

התשובה היא ב'.

לפי משפט הגבול המרכזי, יש שאיפה בהתפלגות למשתנה נורמלי סטנדרטי.

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}}{\sigma^2} = 1 \text{ ו } \mu = 0 \text{ בשאלה } \sigma^2 = 1$$