

פתרון לבחינה מ 31.03.23

שאלה 1

התשובה היא ג'.
יהיו X ו Y אורכי הצלעות.

$$\begin{aligned} V(2X + 2Y) &= V(2X) + V(2Y) = 2^2 V(X) + 2^2 V(Y) = \\ &= 4 \cdot \frac{(2 - 0)^2}{12} + 4 \cdot \frac{(2 - 0)^2}{12} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

שאלות 2 ו 3

התשובה לשאלה 2 היא ג'. התשובה לשאלה 3 היא א'.
יהיו X, Y, Z שלושה משתנים אינדיקטורים שמייצגים הצלחות.
$$\begin{aligned} V(X + Y + Z) &= V(X) + V(Y) + V(Z) + 2Cov(X, Y) + 2Cov(X, Z) + \\ &+ 2Cov(Y, Z) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.9 + \\ &+ 2(P(X = 1, Y = 1) - P(X = 1)P(Y = 1)) + \\ &+ 2(P(X = 1, Z = 1) - P(X = 1)P(Z = 1)) + \\ &+ 2(P(Y = 1, Z = 1) - P(Y = 1)P(Z = 1)) = \\ &= 0.25 + 0.16 + 0.09 - 2(0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1) \\ &+ 2(P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Z = 1) + P(Y = 1, Z = 1)) \end{aligned}$$

השורה האחרונה מקבלת ערך מכסימלי כאשר המאורע הראשון מכיל את השני שמכיל את השלישי. כך הסתברויות החיתוכים הן 0.1, 0.1, 0.2.

השורה האחרונה מקבלת ערך מינימלי כאשר שלושת המאורעות הם זרים, ואז לכל חיתוך יש הסתברות אפס.

הערות

לא היתה הנחה שהמאורעות הם ב"ת.
לכל מאורע יש כאן הסתברות שונה. לכן לא יתכן שהמאורעות השונים הם העתק אחד של אחר.

שאלה 4

התשובה היא ג'.
באופן ב"ת בתוצאת ההטלה של הקוביה הירוקה, בכל הטלה אחרת מקבלים תוצאה זהה לתוצאת הראשונה בסיכוי שישית. התפלגות מספר הכחולות הזהות לה היא סכום של אינדיקטורים ב"ת שמתפלג $Bin\left(3, \frac{1}{6}\right)$. משתנה זה מקבל את הערך 3 בהסתברות חיובית.

הערות

ההתפלגות היא בינומית הודות לכך שכל התוצאות האפשריות של הקוביה הן שוות הסתברות. אילו זה לא היה המצב, אז שיוויון בין זוג משתנים אחד, היה מגדיל את

ההסתברות לקבלת תוצאה בעלת הסתברות גבוהה יותר על-ידי זוג המשתנים, ובכך מגדיל את הסיכוי לשיוויון בין המשתנים האלה למשתנים אחרים.

שאלה 5

התשובה היא א'.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k, Y = k) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 0.5 \cdot 0.5^{k-1} \cdot 0.5 \cdot 0.5^{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 0.5^{2k} = \frac{0.25}{1 - 0.25} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

הערה

לא נדרש כאן לחשב הסתברות מותנה.

שאלה 6

התשובה היא ב'.

המינימום מתפלג גיאומטרית עם פרמטר שלושה רבעים. בכל שלב שעד אליו לא היתה הצלחה, סיכויי ההצלחה הם $1 - 0.5^2$ או לי עקרון ההכלה וההפרדה $0.5 + 0.5 - 0.5^2$.

הערות

לא סביר שתוחלת המינימום תהיה שווה ל 2. למשתנה בודד יש תוחלת 2. המינימום יכול להיות שווה לאותו משתנה, אבל הוא יכול גם להיות קטן ממנו. הוא לא יכול להיות גדול ממנו. לכן התוחלת של המינימום חייבת להיות קטנה מ 2. 1 הוא הערך הכי קטן שהמינימום יכול לקבל. אבל הוא יכול גם לקבל ערכים גדולים יותר. לכן תוחלת המינימום חייבת להיות גדולה מ 1.

שאלה 7

התשובה היא ב'.

מדובר בתוחלת סכום של שני אינדיקטורים. האינדיקטורים הם תלויים מכיון שאם נקודה אחת מרוחקת מאחרת, זה מגדיל את הסיכוי שהיא קרובה לאחד הקצוות, וזה מגדיל את הסיכוי שהיא רחוקה מהנקודה השלישית. התפלגות הסכום של האינדיקטורים התלויים אינה בינומית.

המאורע שזוג נקודות מרוחקות ביותר מ 1 מיוצג על-ידי שני משולשים ישרי זווית בעלי שוקיים באורך 1, מתוך רבוע שאורך צלעותיו הם 2. תוחלת הסכום של שני האינדיקטורים היא $2 \cdot 0.25 = 0.5$.

שאלה 8

התשובה היא ה'

נתן דוגמא שמפריכה את כל הטענות.

נניח שבסיכוי חצי עבור כל n אי זוגי $X_n = \sqrt{n}$ ועבור כל n זוגי $X_n = -\sqrt{n-1}$ ובסיכוי חצי עבור כל n אי זוגי $X_n = -\sqrt{n}$ ועבור כל n זוגי $X_n = \sqrt{n-1}$. סדרת המומנטים הרביעים וגם סדרת הערכים המוחלטים של המשתנים שואפת לאין סוף. בכל נקודה n הערך המוחלט של הסכום המצטבר של המשתנים הוא בהכרח לא יותר מ $\sqrt{n}$, ולכן סדרת הממוצעים המצטברים שואפת לאפס.

הערות

אם בהסתברות חיובית אין סוף פעמים מתקיים ש $|X_n|$ הוא בסדר גודל של n או יותר אז החוק החזק לא חל על הסדרה. ברגע שמשתנה מקבל ערך כזה, אז הממוצע מאוד משתנה. כך הוא לא יכול להתייצב קרוב לאפס.

שאלה 9

התשובה היא א'.

בכל מטבע יש התיצבות של שכיחות ה"עצים" סביב הסיכוי ל"עץ".
כדי שהמאורע כפי הנראה יקרה, צריך בשלב הראשון לבחור במטבע הראשון ובעוד אחד משני האחרים, ובשלב השני צריך להבחר מביניהם המטבע שאינו הראשון.
(אם השתלשלות זאת לא תתרחש אז המאורע כנראה לא יתרחש).
הגבול הוא

$$\binom{2}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.5$$

שאלה 10

התשובה היא א'.

שוב בכל מטבע יש התיצבות של שכיחות ה"עצים" סביב הסיכוי ל"עץ".
כדי שהמאורע כפי הנראה יקרה, צריך בשלב הראשון לבחור במטבע הראשון ובעוד אחד משלושת האחרים או בשני וברביעי. בשלב השני צריך לבחור מבין השניים את זה שבו הסיכוי ל"עץ" גדול יותר.
(אם השתלשלות זאת לא תתרחש אז המאורע כנראה לא יתרחש).
הגבול הוא

$$\frac{4}{\binom{6}{2}} \cdot 0.5$$