

פתרון לבחינה מ 17.02.23

שאלה 1

התשובה היא א'.

$$V(S) = E((X^2)^2) - E^2(X^2)$$
$$\text{כאשר } E(X^4) = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \quad | \quad E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

הערה

יהי S שטח הרבוע. מתקיים עבור $0 \leq s \leq 1$:

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(X \leq \sqrt{s}) = \sqrt{s}$$
$$f_S(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}$$

שאלה 2

התשובה היא א'.

נניח שמדובר ברבוע שאורך כל צלע שלו היא למשל חצי. במקרה זה המרחק של הנקודה לכל צלע קטן מ 1 בהסתברות 1. כל זוג מאורעות בעלי הסתברות 1 הם ב"ת.

הערה

גם כאשר מדובר ברבוע בעל אורך צלע 1, כל המאורעות הם בעלי הסתברות 1, ולכן הם ב"ת. נקודה נמצאת במרחק 1 מצלע רק אם היא על הצלע הנגדית, ולכן יש הסתברות אפס.

שאלה 3

התשובה היא ד'.

נניח שהמצולע הוא טרפז שווה שוקיים שאורכי בסיסיו הם 2 ומספר קטן (למשל מאית) ובעל גובה שאורכו 2. המרחק לבדיוק אחד משני הבסיסים קטן מ 1. לכן זוג המאורעות שקשורים לבסיסים הם תלויים. אם המרחק לשוק אחד גדול מ 1, אז המרחק לשוק השניה קטן מ 1. לכן זוג המאורעות שקשורים בשוקיים הם תלויים. אם המרחק לבסיס הקטן קטן מ 1 אז בהכרח המרחקים לשוקיים קטנים מ 1, אבל באופן לא מותנה המרחק לשוק לא חייב להיות קטן מ 1. לכן ארבעת הזוגות האחרים של מאורעות הם גם תלויים.

הערה

במלבן ובפרט ברבוע יש לכל היותר שני זוגות תלויים. אין במלבן תלות בין המרחקים לשתי צלעות סמוכות.

שאלה 4

התשובה היא ב'.

יש $\binom{5}{3} = 10$ קבוצות של שלושה צמתים. לכל אינדיקטור שקבוצה מסוימת היא משולש יש

תוחלת $\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}$. תוחלת סכום האינדיקטורים שווה לסכום התוחלות שלהם.

הערה

מספר המשולשים לא מתפלג בינומית. יש תלות בין שלשות שונות. אילו סיכויי הצביעה בכחול ובירוק היו שווים, אז היתה אי תלות בזוגות בין שלשות שונות. אי תלות בזוגות לא היתה מספיקה לכך שההתפלגות תהיה בינומית. אבל כאן הסיכוי לכחול לא שווה לסיכוי לירוק, ולכן אפילו אין אי תלות בזוגות.

שאלה 5

התשובה היא ד'.

מספר הנסיונות עד קבלת הצלחה מתפלג גיאומטרי. למשתנה גיאומטרי יש פונקציית הסתברות מונוטונית יורדת. לכן הסיכוי לקבל ערך בין 501 ל 600 קטן מהסיכוי לקבל ערך בין 401 ל 500 שקטן מהסיכוי לקבל ערך בין 301 ל 400 שקטן מהסיכוי לקבל ערך בין 201 ל 300 שקטן מהסיכוי לקבל ערך בין 101 ל 200 שקטן מהסיכוי לקבל ערך בין 1 ל 100.

הערה

ההסתברות לקבל ערך שגדול מ 510 אך לא גדול מ 590 היא $q^{590} - q^{510}$.

שאלה 6

התשובה היא א'.

כאשר מספר ההטלות גדול, לגבי שני סוגי המטבעות, מאוד לא סביר לקבל בדיוק שכיחות של 0.8 הצלחות. אבל היחס בין הסבירות שזה יקרה במטבע של גארט' בייל לסבירות שזה יקרה במטבע של הארי קיין שואפת לאין סוף. מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.5 \cdot \left(\frac{10^{n+1}}{8 \cdot 10^n}\right) 0.5^{8 \cdot 10^n} \cdot 0.5^{2 \cdot 10^n}}{0.5 \cdot \left(\frac{10^{n+1}}{8 \cdot 10^n}\right) 0.99^{8 \cdot 10^n} \cdot 0.01^{2 \cdot 10^n} + 0.5 \cdot \left(\frac{10^{n+1}}{8 \cdot 10^n}\right) \cdot 0.5^{8 \cdot 10^n} \cdot 0.5^{2 \cdot 10^n}} = 1$$

לכן כאשר $n \rightarrow \infty$ בהינתן מאורע A_n ההסתברות שגלן הודל צופה בסדרה של גארט' בייל שואפת ל 1.

הערה

פרופורציה של 0.8 היא יותר קרובה ל 0.99 מאשר ל 0.5. אבל במטבע שבו ההסתברות היא 0.99 השונות וסטיית התקן הם קטנים בהרבה מאשר במטבע שבו ההסתברות היא 0.5, ולכן בו ההסתברות לסטיה גדולה מהתוחלת היא הרבה יותר קטנה מאשר במטבע הוגן.

שאלה 7

התשובה היא ב'.

הסיכוי שהמכסימום לא גדול מ 5 אך הוא לא קטן מ 5 (זאת אומרת שהוא לא קטן שווה

$$\text{מ } 4) \text{ הוא } \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

הערות

לא מספיק שתהיה לפחות תוצאת 5 אחת. דרוש גם שכל התוצאות לא יהיו גדולות מ 5. אין לפתור באמצעות תהליך דו שלבי שבו מבטיחים שבאחת ההטלות נקבל 5 ואחר כך בבאות לא יותר מ 5. בתהליך כזה מצבים נספרים יותר מפעם אחת: יתכן שבהטלה נוספת נקבל 5, והטלה זו יכולה להיות זו ששריינה את התוצאה 5. לא ניתן להניח שרק בהטלה בודדת התקבלה התוצאה 5.

שאלה 8

התשובה היא ב'.

דרך ראשונה

אחרי שתי הטלות בסיכוי רבע נחכה לשתי תוצאות "עץ", בסיכוי רבע נחכה לתוצאת "עץ" אחת, ובסיכוי חצי נחכה לתוצאת "פלי" אחת.

זמן הצפייה לתוצאה מסוימת מתפלג $G(0.5)$ שהוא בעל תוחלת 2.

זמן הצפייה לשתי תוצאות מאותו סוג מתפלג $NB(2,0.5)$ שהוא בעל תוחלת 4.

לכן התוחלת הכללית כולל שתי ההטלות הראשונות היא

$$2 + 0.25 \cdot 4 + 0.25 \cdot 2 + 0.5 \cdot 2$$

דרך שנייה

מספר ההטלות שווה למכסימום בין זמן קבלת שתי תוצאות "עץ" לבין קבלת תוצאת "פלי". מתקיים תמיד שהסכום של המכסימום והמינום של שני משתנים שווה לסכום שני המשתנים. לכן תוחלת המכסימום שווה לסכום התוחלות של שני המשתנים פחות תוחלת המינום.

מספר ההטלות עד לקבלת תוצאת "פלי" מתפלג $G(0.5)$ שהוא בעל תוחלת 2.

מספר ההטלות עד קבלת שתי תוצאות "עץ" מתפלג $NB(2,0.5)$ שהוא בעל תוחלת 4.

המינום מקבל את הערך 1 בסיכוי חצי (אם בהטלה הראשונה מקבלים "פלי") ומקבל את הערך 2 אחרת (אם בהטלה הראשונה מקבלים "עץ").

לכן תוחלת המכסימום היא $2 + 4 - 1.5$.

הערה

זמן הציפיה הכולל קטן מסכום זמני הציפיה לפעמיים "עץ" ו"פלי" אחד. הסיבה לכך היא שיש חפיפה חלקית בין שני זמני הציפיה. למשל, ההטלה הראשונה היא משותפת לשני זמני ציפיה אלה.

שאלה 9

התשובה היא ה'.

יתכן שמתקבלים בהסתברות חיובית ערך בודד חיובי שהוא b וגם הערך 0 או רק הערך b או רק הערך 0. במקרים אלה מתקיים $E(X) = P(X = b)b$ ואז מתקיים

$$P(X \geq b) = P(X = b) = \frac{E(X)}{b}$$

אם מתקבלים גם ערכים חיוביים אחרים אז מתקיים

$$E(X) > P(0 \leq X < b) \cdot 0 + P(X \geq b)b = P(X \geq b)b$$

שאלה 10

התשובה היא ד'.

הערה

החוק החזק עוסק בסדרת הממוצעים המצטברים.

התכנסות בהסתברות של סדרת המשתנים עוסקת בערכים שהמשתנים מקבלים ולא בסדרת הממוצעים המצטברים. היא לא החוק החלש.

נתן דוגמא שלגביה חל החוק החזק אבל אין התכנסות בהסתברות למשתנה מנוון. סדרת משתנים ב"ת שכל אחד מהם מקבל את הערכים -1 ו 1 בסיכוי שווה. מכיון שהמשתנים הם ב"ת שווי התפלגות ובעלי מומנט רביעי סופי (שווה ל 1) אז החוק החזק חל על הסדרה. כל המשתנים בהכרח רחוקים מאפס בלפחות 1, לכן אין התכנסות בהסתברות של סדרת המשתנים לקבוע אפס (אין גם התכנסות בהסתברות לקבוע אחר). יש התכנסות של סדרת התוחלות (החוק החלש), אבל לא של המשתנים.

נתן דוגמא שלגביה יש התכנסות בהסתברות, אבל החוק החזק לא חל.

נניח שהמשתנים הם ב"ת. נניח שמתקיים

$$P(X_n = 4^n) = P(X_n = -4^n) = \frac{1}{2n}$$

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \neq 0) = 0 \text{ מתקיים}$$

אבל לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות אחת אין סוף פעמים יתקיים $(X_n = 4^n)$ ובנקודות אלה הממוצע המצטבר יהיה גדול מלמשל 1.

שלומי