

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

1. ענו על 10 השאלות הבאות.
2. בראש כל תשובה יש לרשום תשובה סופית שהיא אחת מחמשת האפשרויות הניתנות. מייד אחרי זה יש לרשום נימוק.
3. ענו על השאלות רק במחברות. טפסי השאלון לא יבדקו.
4. משקל כל שאלה הוא 10 נקודות.
5. על תשובה סופית שגויה עם הסבר לא מושלם, ינתן ניקוד חלקי. על תשובה סופית נכונה ללא הסבר מתאים, לא ינתן ניקוד.
6. הצובר N נקודות יקבל ציון ששווה ל $\min\{N + 3, 100\}$.
7. אין להשתמש בספרים ובמחברות. ניתן להשתמש בשלושה דפי עזר דו-צדדיים ובמחשבון שלא ניתן לתכנות.
8. לרשותכם 3 שעות.

בהצלחה !

שאלה 1

אורך צלעו של רבוע מתפלג $U(0,1)$ (אחיד רציף). מהי שונות שטח הרבוע ?

- א. $\frac{4}{45}$
- ב. $\frac{1}{9}$
- ג. $\frac{2}{15}$
- ד. $\frac{1}{15}$
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

נתונים אלה מתייחסים לשאלות 2 ו 3.
מיקומה של נקודה מתפלג אחיד בתוך מרובע (מצולע בעל ארבע צלעות שאינו בהכרח מלבן).
עבור כל צלע של המרובע נגדיר מאורע שמרחק הנקודה שנבחרת מהצלע קטן מ 1.
נסתכל על קבוצת $\binom{4}{2} = 6$ הזוגות הלא סדורים של מאורעות אלה.
יהי n מספר הזוגות התלויים מבין זוגות אלה.
(מדובר על תלות בזוגות שהיא תלות בין שני המאורעות שבזוג).

שאלה 2

מהו הערך המינימלי שיכול לקבל n ?

- א. 0
- ב. 1
- ג. 2
- ד. 4
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 3

מהו הערך המכסימלי שיכול לקבל n ?

- א. 2
- ב. 3
- ג. 4
- ד. 6
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 4

נתון גרף שלם לא מכוון בעל 5 צמתים. צובעים את קשתות הגרף בכחול וירוק. כל קשת נצבעת בכחול בסיכוי $\frac{2}{3}$ או בירוק בסיכוי $\frac{1}{3}$, וזאת באופן ב"ת בצביעת קשתות אחרות. קבוצה של שלושה צמתים נקראת משולש אם כל שלושת הקשתות שמחברות אותם צבועות באותו צבע. מהי תוחלת מספר המשולשים?

- א. $\frac{3}{10}$
- ב. $\frac{3}{11}$
- ג. $\frac{3}{4}$
- ד. $\frac{3}{11}$
- ה. $\frac{3}{4}$

כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 5

בכל ניסוי יש סיכוי הצלחה של $0 < p < 1$, וזאת באופן ב"ת בנסיונות אחרים. מבצעים סדרת נסיונות עד קבלת הצלחה. יהי b ההסתברות שכך נבצע בין 510 ל 590 נסיונות.

- א. b יכול לקבל כל ערך בקטע הפתוח שבין 0 ל 1.
- ב. b יכול לקבל ערך גדול מ 0.8, אבל לא יכול לקבל ערך גדול מ 0.9.
- ג. b יכול לקבל ערך גדול מ 0.5, אבל לא יכול לקבל ערך גדול מ 0.8.
- ד. b חייב להיות קטן מ 0.2.
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 6

הארי קיין מבצע סדרה אין סופית של הטלות ב"ת של מטבע שבכל הטלה שלו מראה "עץ" בסיכוי 0.99. גארט' בייל מבצע סדרה אין סופית של הטלות ב"ת של מטבע הוגן שבכל הטלה שלו מראה "עץ" בסיכוי 0.5. גלן הודל צופה רק באחת משתי הסדרות של ההטלות. בסיכוי חצי הוא צופה בכל סדרת ההטלות של הארי קיין, ובסיכוי חצי הוא צופה בכל סדרת ההטלות של גארט' בייל. יהי A_n המאורע שב 10^{n+1} ההטלות הראשונות שרואה גלן הודל התקבלו בדיוק $8 \cdot 10^n$ תוצאות "עץ". יהי B_n המאורע שבהטלה ה $6 \cdot 10^{n+1}$ שרואה גלן הודל (זו הטלה בודדת) מתקבלת תוצאת "עץ".

מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n | A_n)$? (מדובר על הסתברות מותנה).

- א. 0.5
- ב. 0.8
- ג. 0.99
- ד. ערך שהוא גדול מ 0.8 אך קטן מ 0.99.
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 7

מבצעים שלוש הטלות ב"ת של קוביה תקינה. מהי ההסתברות שהתוצאה המכסימלית שתתקבל היא 5 ?

- א. $\frac{5}{18}$
- ב. $\frac{61}{216}$
- ג. $\frac{31}{108}$
- ד. $\frac{7}{24}$
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 8

מבצעים סדרת הטלות ב"ת של מטבע הוגן שבכל הטלה מראה "עץ" בסיכוי חצי ו"פלי" בסיכוי חצי. מהי תוחלת מספר ההטלות עד שנצבור לפחות שתי תוצאות "עץ" וגם לפחות תוצאת "פלי" אחת ?

- א. 5
- ב. 4.5
- ג. 6
- ד. 5.5
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 9

יהי X משתנה מקרי בדיד שמקבל רק ערכים אי שליליים. נניח ש $E(X)$ היא סופית. יהי b מספר ממשי חיובי. נניח שהחסם העליון עבור $P(X \geq b)$ המתקבל על ידי אי שיוויון מרקוב שווה ל $P(X \geq b)$.

- א. בהכרח X מקבל רק ערך אחד בהסתברות חיובית.
 - ב. בהכרח X מקבל בדיוק שני ערכים בהסתברות חיובית.
 - ג. אין הגבלה על מספר הערכים ש X יכול לקבל.
 - ד. X יכול לקבל כל מספר סופי של ערכים בהסתברות חיובית, אבל רק מספר סופי.
 - ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.
-

שאלה 10

תהי סדרת משתנים מקריים $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב"ת.

נניח שמתקיים עבור כל $1 \leq n < \infty$: $E(X_n) = 0$.

נסתכל על שתי תכונות.

תכונה ראשונה: החוק החזק חל על הסדרה.

תכונה שנייה: סדרת המשתנים שואפת בהסתברות למשתנה המנוון שמקבל רק את הערך 0.

- א. קיום התכונה הראשונה גורר את קיום התכונה השנייה, וקיום התכונה השנייה גורר את קיום התכונה הראשונה.
 - ב. קיום התכונה הראשונה גורר את קיום התכונה השנייה, אך קיום התכונה השנייה לא גורר את קיום התכונה הראשונה.
 - ג. קיום התכונה הראשונה לא גורר את קיום התכונה השנייה, אך קיום התכונה השנייה גורר את קיום התכונה הראשונה.
 - ד. קיום התכונה הראשונה לא גורר את קיום התכונה השנייה, וקיום התכונה השנייה לא גורר את קיום התכונה הראשונה.
 - ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.
-