

פתרון לבחינה מ 16.06.22

שאלה 1

התשובה היא ב'.
לפי תכונת חוסר הזכרון של משתנה מקרי מעריכי, ההתפלגות המותנה של ההפרש מ 1 היא מעריכית עם פרמטר 1.

שאלה 2

התשובה היא ב'.
ההתפלגות המותנה היא אחידה רציפה בין 4 ל 8.

שאלה 3

התשובה היא א'.
לא ניתן לבנות משולש אם ורק אם אורך צלע אחת שווה לפחות לסכום שתי האחרות. כאן שניים מהמשתנים הם שווים ולכן לא יכולים להיות ארוכים מסכום שני האחרים. יתכן שלא ניתן לבנות משולש אם הן בעלות אורך 1 או 2 או 3. הסיכוי לכך הוא

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

שאלה 4

התשובה היא ג'.
עבור כל ערך של סכום שני האחרים, המשתנה Y משלים לכפולה של 3 בסיכוי $\frac{2}{6}$.

שאלה 5

התשובה היא ד'.
מתקיים
$$Cov(X, X + Y + Z + W) = Cov(X, X) + Cov(X, Y) + Cov(X, Z) + Cov(X, W)$$

כל אחת מהשונויות המשותפת האלה מקבלת ערך מכסימלי כאשר כל אחד מהמשתנים הוא העתק של המשתנה X (כך תוחלת המכפלה שלהם מקבלת ערך מכסימלי). במקרה כזה כל אחת מהשונויות המשותפות שווה לשונות של X ששווה לרבע.

שאלה 6

התשובה היא ד'.
השונויות המשותפת בין X לעצמו שווה לשונות שלו שהיא 0.25 . כל אחת מהשונויות המשותפות האחרות מקבלת ערך מינימלי של -0.25 (כאשר כל אחד מהמשתנים האחרים מקבל את הערך $1 - X$).

שאלה 7

התשובה היא ד'.

הפתרון הוא לפי עקרון ההסתברות השלמה כשמתנים בתוצאת המהלך הראשון.

שאלה 8

התשובה היא א'.

לפי החוק החזק ממוצע ערכי הצעדים ישאף בהסתברות אחת לערך חיובי. לכן בהסתברות אחת הסכום יהיה חיובי החל מאיזשהו שלב. לכן אם בשלב 1 נהיה בשליליים, אז נצטרך לעבור באיזשהו שלב בראשית.

שאלה 9

התשובה היא ג'.

בשלב 1 נהיה בנקודה 1. מהנקודה 1 יש סיכוי של שליש להגיע ישירות לראשית וסיכוי של שני שליש להגיע לנקודה 2. כדי להגיע מהנקודה 2 לראשית, צריך באיזשהו שלב להגיע לנקודה 1 ולזה יש סיכוי כמו להגיע באיזשהו שלב מהנקודה 1 לראשית. אם חוזרים באיזשהו שלב לנקודה 1 אז הסיכוי חוזר להיות הסיכוי המקורי להגיע מ 1 לראשית. מבוקש פתרון למשוואה $t = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t^2$. הפתרון איננו שווה ל 1 כי בסופו של דבר נהיה רק בחיובים, לכן לא בסיכוי 1 חוזרים לראשית לאחר כל עזיבה של הראשית.

שאלה 10

התשובה היא ה'.

בכל מקרה יש שאיפה בהתפלגות. מתקיים

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

אם המשתנים בם ב"ת אז לפי הלמה של בורל קנטלי בהסתברות אחת אין סוף משתנים

יקבלו את הערך 1 ($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i+1} = \infty$).

נראה גם מקרה שבו יש תלות ובהסתברות חיובית אין סוף מהמשתנים יקבלו את הערך 1. נניח שאם המשתנה הראשון שבסדרה מקבל את הערך 0 אז גם כל המשתנים האחרים שבסדרה מקבלים את ערך זה, ושאר המשתנה הראשון מקבל את הערך 1 אז עבור כל i יתקיים שהמשתנה i יקבל את הערך 1 בסיכוי $\frac{2}{i+1}$ באופן ב"ת באחרים (רק בהינתן ערכו של הראשון). כך במקרה השני שקורה בסיכוי חצי, בהסתברות 1 אין סוף מהמשתנים יקבלו את הערך 1.