

פתרון לבחינה מ 08.04.22

שאלה 1

תשובה א'

$$E(X) = \int_0^1 2x \cdot x dx = \frac{2}{3}$$
$$E(X^2) = \int_0^1 2x \cdot x^2 dx = \frac{1}{2}$$
$$V(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

שאלה 2

תשובה ד'

תוחלת סכום ארבע הטלות היא $4 \cdot 3.5 = 14$ (תוחלת סכום תמיד שווה לסכום התוחלות מבלי שנדרשים תנאים נוספים). החסם המתקבל לפי אי שיוויון מרקוב הוא $\frac{14}{28}$.

הערה

אנו יודעים שלא יתכן שהסכום יהיה גדול מ 24. לכן הסתברות המאורע היא אפס. אבל כאן השאלה היתה, מהו החסם שאפשר לקבל רק על-ידי שימוש באי שיוויון מרקוב. ראינו מקרים שבהם החסם המתקבל על-ידי אי שיוויון מרקוב הוא רחוק מההסתברות האמיתית.

שאלה 3

תשובה ד'

בכל מקרה לא ניתן לקבל שלוש תוצאות שונות בשני נסיונות. לכן בכל מקרה לפחות משתנה אחד מקבל את הערך אפס, והמכפלה מקבלת את הערך אפס.

שאלה 4

תשובה ב'

המכפלה אינה זוגית, רק אם בכל שלושת ההטלות מתקבלת תוצאה אי זוגית. זה קורה בסיכוי 0.5^3 .

שאלה 5

תשובה ב'

מדובר בהתפלגות $NB\left(2, \frac{2}{6}\right)$ (מחכים לשתי הצלחות, כאשר בכל הטלה הסיכוי להצלחה הוא $\frac{2}{6}$).

שאלה 6

תשובה ג'

ידוע שבפעם ה- k היתה ההצלחה השנייה. ההצלחה הראשונה התקבלה בכל אחד מהמקומות הקודמים בסיכוי שווה. השונות של התפלגות אחידה תלויה בפרמטרים של ההתפלגות. הערך של k משפיע על השונות.

שאלה 7

תשובה ה'

נניח שמתקבלים בכל פעם בסיכוי שווה הערכים -2 ו 18 . המאורע שתמיד יתקבל הערך 18 הוא בעל הסתברות אפס, אבל הוא לא מאורע ריק. המאורע שבמאה הפעמים הראשונות יתקבל תמיד הערך 18 הוא בעל הסתברות נמוכה, אבל חיובית. במקרה זה מתקיים

$$E(X^3) = 0.5 \cdot (-2)^3 + 0.5 \cdot 18^3 > 500$$

מתקיים $E(X^2) = V(X) + E^2(X)$.

שאלה 8

תשובה ג'

בכל מקרה סכום הערכים המוחלטים של התוצאות לא גדול מ 1 . לכן הערך המוחלט של כל סכום מצטבר הוא לא גדול מ 1 . לכן הממוצע שואף לאפס ולא רק בהסתברות.

שאלה 9

תשובה א'

כל משתתף חוץ מהמנצח בטורניר מפסיד בדיוק משחק אחד. לכן יש בהכרח 31 משחקים.

נסתכל על כל משחק בודד. שני משתתפיו הם בנים בסיכוי $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{8 \cdot 7}{32 \cdot 31}$ (אין החזרות). זו

התוחלת של אינדיקטור של משחק בודד. יש 31 אינדיקטורים כאלה, ותוחלת סכומם שווה לסכום התוחלות שלהם.

שאלה 10

תשובה ד'

בכל נקודת זמן הפונקציה המייצגת את ההסתברות שמכונה מסוג מסוים שורדת עד אליו היא רציפה. לכן ההסתברויות המותנות שמדובר במכונות מסוימות הן רציפות בכל נקודה. בכל נקודה הפונקציה שמייצגת את ההסתברות שמכונה מסוג מסוים נתון תשרוד החל ממנו עוד לפחות זמן אחת, היא רציפה (משתנים מקריים רציפים).

הסבר נוסף

יהי X – המשתנה המייצג את אורך חיי המכונה (שהסוג שלה לא ידוע).

נראה שפונקציית ההסתברות המותנה $\frac{P(X > t+1)}{P(X > t)}$ היא רציפה בכל נקודה. בתחום שבו המונה

הוא חיובי, גם המכנה הוא חיובי ומדובר במנה של שתי פונקציות רציפות ששונות מאפס שהיא רציפה.