

פתרון לבחינה מ 20.02.19

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ד	ב	ד	ב	ב	ג	א	א	ד	א	ה	ג	ג	ד	ג	ד

הסברים קצרים

שאלה 1

דרוש שהם ינצחו משחק אחד, אך לא ינצחו ארבעה משחקים. הסיכוי לכך הוא $0.5 - 0.5^4$.

שאלה 2

הם צריכים לנצח ארבעה משחקים, אך הירוקים לא יהיו אחת מחמשת היריבות שלהם שנבחרות מתוך 31 קבוצות. הסיכוי לכך הוא $0.5^4 \cdot \frac{26}{31}$.

שאלה 3

מדובר בהסתברות המאורע מראש לפני שהתקבלה התוצאה של המשתנה הראשון. הסתברות זו משקללת את כל המקרים האפשריים לגבי המשתנה הראשון. אם המשתנים היו תלויים, אז יכלו להתקבל תשובות שונות. אבל, כאן יש הנחה שהמשתנים הם ב"ת. אם $X_1 \leq 2$ אז כל אחד מהמשתנים האחרים גדול ממנו בלפחות 1 בהסתברות קבועה חיובית, וזאת באופן ב"ת במשתנים האחרים (בהינתן שכבר ידוע ערכו של המשתנה הראשון). לכן לפי הלמה של בורל קנטלי, במקרה זה בהסתברות 1 אין סוף מהמשתנים יהיו גדולים מהראשון בלפחות 1.

שאלה 4

המינימום בין מספר משתנים מעריכיים ב"ת מתפלג מעריכית עם פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים של המשתנים. הזמן עד שנשאר רק רכיב אחד מורכב משלושה פרקי זמן. הראשון הוא עד שמתקלקל הראשון ושלו יש תוחלת $\frac{1}{4}$, השני עד שמתקלקל אחד משלושת הנותרים ושלו יש תוחלת $\frac{1}{3}$, והשלישי שיש לו תוחלת $\frac{1}{2}$. נסביר מדוע למינימום בין מעריכיים יש התפלגות מעריכית עם פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים: כדי שהמינימום יהיה גדול מקבוע נתון a , צריכים כל המשתנים להיות גדולים מ a . מכיון שהם ב"ת, ההסתברות לכך שווה למכפלת ההסתברויות של בודדים להיות גדולים מ a . מכאן מתקבל המשלים לפונקציית ההסתברות המצטברת.

שאלה 5

בכל משולש צבועות כל הקשתות כחול או כל הקשתות בירוק בסיכוי $0.5^3 + 0.5^3$. יש $\binom{4}{3}$ משולשים, ותוחלת סכום שווה לסכום התוחלות.

שאלה 6

עד שמקבלים רצף של 4 הצלחות, יכולים בכל שלב להמציא בארבעה מצבים. הראשון הוא שכרגע לא הצלחנו לצבור כל רצף, השני הוא שכרגע הסתיים רצף באורך 1, השלישי הוא שכרגע הסתיים רצף באורך 2, והרביעי הוא שכרגע הסתיים רצף באורך 3. למשל, בכל פעם שבה נמצאים במצב הרביעי, זו הפעם האחרונה שבה נמצאים בו אם"ם בהטלה הבאה נקבל הצלחה, ולמשל בכל פעם שנמצאים במצב הראשון, זו הפעם האחרונה שבה נמצאים בו אם"ם בארבעת ההטלות הבאות נקבל הצלחה. כך מספר הפעמים שבהם נמצאים בכל מצב מתפלג גיאומטרית עם פרמטר שונה. תוחלת הסכום של המשתנים הגאומטרים האלה היא $2 + 4 + 8 + 16$.

הערה

אפשר גם לפתור באמצעות פתירת מערכת משוואות או משוואה בודדת.

שאלה 7

דרוש שלפחות אחת משתי הצלעות הנצבות תהיה קטנה מ 1. זה קורה בסיכוי $1 - 0.5^2$.

שאלה 8

אם שתי הצלעות הניצבות גדולות מ 1, אז המשתנה מקבל את הערך 4, אם בדיוק אחת מהן גדולה מ 1, אז המשתנה מקבל את הערך 2, ואם אף אחת מהן לא גדולה מ 1 אז הוא מקבל את הערך 0. כך למשל, בהסתברות $0.5 \cdot 0.5 \cdot 2$ הוא מקבל את הערך 2.

שאלה 9

זוג צלעות נגדיות הן העתק אחת של השניה והן לא משתנה מנוון. ערך מסוים של אחת מהן מכתיב את ערך השניה. לכן הן תלויות. המאורע ששתי צלעות ניצבות הן שוות אורך, הוא בעל הסתברות אפס, אבל הוא אינו קבוצה ריקה.

שאלה 10

$$\frac{3}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

שאלה 11

בסיכוי חצי החל משלב מסוים יש תמיד 3 כדורים כחולים ובסיכוי חצי החל משלב מסוים יש תמיד 5 כדורים כחולים. לכן ממוצע מספר הכחולים שואף או ל 3 או ל 5 ולא לגודל נתון מראש. לכן על סדרת מספרי הכדורים הכחולים לא יכול לחול החוק החלש. החל משלב מסוים פרופורצית הכדורים הכחולים היא תמיד 1. תוחלת הפרופורציה שואפת ל 1 כאשר מספר השלבים שואף לאין סוף, והסיכוי לסטייה מהתוחלת ביותר מקבוע נתון שואפת לאפס.

שאלה 12

החלק השלם מקבל את הערך 0 בהסתברות 0.4, את הערך 1 בהסתברות 0.4 ואת הערך 2 בהסתברות 0.2.

שאלה 13

במקום שבו נקטע רצף העצים, הסיכוי לקבל רצף של 200 עץ לפני רצף של 100 פלי הוא קרוב לאפס. כאן ידוע שב 200 ההטלות הראשונות מופיע פלי בדיוק פעם אחת. מיקום ההטלה של פלי מתפלג אחיד. אם היא במקום הראשון, אז דרוש שההטלה ה-201 תהיה של עץ. אם היא במקום השני, אז דרוש שההטלות ה-201 וה-202 יהיו של עץ. אם היא במקום השלישי, אז דרוש שההטלות ה-201, ה-202 וה-203 יהיו של עץ. ההסתברות השלמה היא בקירוב

$$\frac{1}{200} \cdot 0.5 + \frac{1}{200} \cdot 0.5^2 + \frac{1}{200} \cdot 0.5^3 + \dots + \frac{1}{200} \cdot 0.5^{200} \cong \frac{1}{200}$$

שאלה 14

$0.1 \cdot 1 + 0.1 \cdot 0 + 0.8 \cdot 0.1$
(אם $f(1) = 1$ אז הסיכוי הוא ודאי ואם $f(1) > 2$ אז הסיכוי הוא 0.1).

שאלה 15

הסיכוי הלא מותנה למאורע $f \circ f(1) = 1$ הוא $0.1 + 0.9 \cdot 0.1 = 0.19$.
בסיכוי 0.9^{10} לא קיים $1 \leq i \leq 10$ שמקיים $f(i) = 1$ ואז בודאי לא מתקיים $f \circ f(1) = 1$.
נחלץ את התשובה מנוסחת ההסתברות השלמה.
 $0.9^{10} \cdot 0 + (1 - 0.9^{10})a = 0.19$

הסבר אחר

יהי A המאורע ש $f \circ f(1) = 1$ ויהי B המאורע שקיים $1 \leq i \leq 10$ שמקיים $f(i) = 1$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.19}{1 - 0.9^{10}}$$

שאלה 16

התוחלת של משתנה $G(0.5)$ היא 2. נשים לב שכל מספר טבעי אינו קטן מסכום הספרות שלו. לכן 2 הוא חסם עליון לתשובה. יש גם מספרים שגדולים מסכום הספרות שלהם. לכן התשובה ממש קטנה מ-2. אם $X \leq 9$ אז סכום ספרותיו שווה לערכו. לכן חסם תחתון לתשובה הוא

$$0.5 \cdot 1 + 0.5^2 \cdot 2 + 0.5^3 \cdot 3 + 0.5^4 \cdot 4 + 0.5^5 \cdot 5 + 0.5^6 \cdot 6 + 0.5^7 \cdot 7$$