

## פתרון לבחינה מ 18.01.19

|    |    |    |    |    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| ה  | ג  | ב  | ב  | ד  | ד  | ב  | א | ג | א | ד | ה | א | ב | א | ג |

### הסברים קצרים

#### שאלה 1

המשתנים הם אי שליליים, לכן רבוע של משתנה אחד גדול מרבוע של משתנה אחר אם"ם המשתנה המקורי גדול מהמשתנה המקורי האחר. יש סימטריה בין המשתנים ושיוויון מתקבל בהסתברות אפס.

#### שאלה 2

יש  $66 = \binom{12}{2}$  זוגות לא סדורים של מיקומים עבור הודל וקיין. מתוכם ב 3 זוגות מפרדים ביניהם בדיוק 8 אנשים.

#### שאלה 3

לכל אחד מ 10 אנשים יש סיכוי שווה להיות בקבוצה של 5 אנשים.

#### שאלה 4

היותו של אדם אחד בין הודל לקיין מגדילה את הסיכויים שהודל וקיין רחוקים ולכן מגדילה את הסיכוי של אחר להיות בין הודל לקיין. נראה גם חישוב של השונות המשותפת:

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

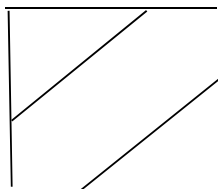
לכל אחד יש סיכוי של  $\frac{1}{3}$  להיות בין הודל לארדילס.

יש סיכוי של  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{\binom{4}{2}}$  ששניהם יהיו בין הודל לקיין ( זה קורה רק אם הודל וקיין הם בקצוות של הרביעיה ). התוחלת של אינדיקטור שווה להסתברות שלו.

אם יש רק אדם אחד אחר, אז יש אינדיקטור יחיד והמספר הכולל שווה לאינדיקטור זה.

#### שאלה 5

הסיכויים דומים לסיכויים שהיו אילו מותר היה להודל ולקיין להיות באותו מקום. הסיכויים דומים לסיכויים שהיו אילו ניתן היה למקם את הודל וקיין ברצף שבין 0 ל 1 שבין הקצוות. ההסתברות המבוקשת שווה בקירוב לסכום השטחים של שני המשולשים שבשרטוט הבא שהוא 0.36



## שאלה 6

המשתנים שבסדרה מקבלים ערכים של לכל היותר 1. ההסתברות שמשתנה שמתפלג  $U(0, n)$  יקבל ערך לא גדול מ 1 היא  $\frac{1}{n}$ .

## שאלה 7

ההסתברות שהמשתנה  $X_n$  יהיה גדול מכל האחרים שווה ל  $\frac{1}{n+1}$  כפול ההסתברות שיש איזשהו משתנה שגדול מכל האחרים.

## שאלה 8

המכסימום של המשתנים שבסדרה מקבל ערך שהוא בין 0 ל 1. ההסתברות המצטברת של  $X_n$  בנקודה 0 היא בדיוק חצי ובנקודה 1 היא  $\phi\left(\frac{1-0}{\sqrt{n}}\right)$  ששואף לחצי כאשר  $n \rightarrow \infty$ .

## שאלה 9

לפי אי שיווין מרקוב מתקבל חסם  $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ . חסם זה הוא הדוק. למשל יתכן  $P(X = 0) = \frac{1}{3}$ ,  $P(X = 60) = \frac{2}{3}$ .

## שאלה 10

לפי אי שיוויון צ'בישב ואפילו ללא שימוש בשיקולי סימטריה מתקבל חסם עליון  $\frac{80 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{20^2}$ . כאשר יש יותר אינדקטורים, אז הממוצע מרוכז יותר סביב התוחלת.

## שאלה 11

צריך שאורכי הצלעות שהן שוות יהיה 3.

## שאלה 12

בכל תת גרף חייב להיות צומת בעל דרגת יציאה אפס ( אחרת נתחיל מסלול בצומת ונהיה חייבים לחזור באיזשהו שלב לצומת קודם ). לכן יש סדר על הצמתים, כך שיש קשת מכוונת מכל צומת לכל צומת בעל אינדקס גבוה יותר. פרמוטציה מסוימת היא מתאימה בהסתברות  $0.5^{\binom{5}{2}} = \frac{1}{1024}$  יש  $5! = 120$  פרמוטציות. המאורעות שפרמוטציות מסוימות הן מתאימות הם זרים.

### שאלה 13

בכל מספר מבקרים לכל היותר פעם אחת. המאורע  $\left|Y_m - \frac{1}{3.5}\right| > 0.001$  גורר את המאורע שב  $\left[\frac{m}{3.5}\right]$  ההטלות הראשונות, ממוצע תוצאות ההטלות סוטה מ 3.5 למשל בלפחות הקבוע השרירותי  $10^{-6}$ . לפי החוק החלש ההסתברות לכך שואפת לאפס כאשר  $m \rightarrow \infty$ .

### שאלה 14

קבלת תוצאת 0 בהטלה היא תוצאת סרק שמשאירה באותו מקום זמנית ולא משפיעה על זהות המספרים שבהם מבקרים. ההתפלגות המותנה של משתנה  $U[0,6]$  בהינתן שהוא לא מקבל את הערך 0 היא  $U[1,6]$ .

### שאלה 15

לגבי כל הטלה, ההסתברות שהיא משלימה את קודמותיה למספר שלם, היא אפס (בשביל זה היא חייבת לקבל ערך מסוים אחד). לאיחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס יש הסתברות אפס.

### שאלה 16

כדי שעד מקום מסוים נבקר ביותר ממחצית השלמים, צריך שנבקר בשני שלמים עוקבים. לכן צריך שבאזשהי הטלה תהיה הסתברות חיובית לקבל תוצאת 1. אבל המאורעות של קבלת תוצאת 1 הם בעלי הסתברות אפס. לאיחוד סופי של מאורעות בעלי הסתברות אפס יש הסתברות אפס. המשתנה  $Y_1$  מקבל בהסתברות 1 את הערך 0 כי כדי שהוא יקבל ערך אחר צריך לקבל תוצאה של 1 בהטלה הראשונה, ולכן יש הסתברות אפס. השונות במשותפת בין משתנה מנוון לכל משתנה אחר היא תמיד אפס. אבל יתכן שבהסתברות חיובית ואפילו הסתברות 1 נבקר בכל הכפולות של 7. זה יכול לקרות אם כל הטלה עבור כל  $i$  מתקיים תמיד  $X_{2i} = 7 - X_{2i-1}$  כאשר כל המשתנים מתפלגים  $U[1,6]$ .

---

שלומי