

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

1. ענו על 16 השאלות הבאות.
2. המסמן 8 תשובות נכונות יקבל ציון 60. על כל תשובה נכונה נוספת יתווספו 5 נקודות.
3. אין להשתמש בספרים ובמחברות. ניתן להשתמש בשלושה דפי עזר דו-צדדיים ובמחשבון שלא ניתן לתכנות.
4. יש לסמן את התשובות רק בעמוד הזה. לכל שאלה יש לסמן רק תשובה אחת.
5. למחברת משמשת כטיוטא בלבד ולא תבדק. לרשותכם 3 שעות.

בהצלחה !

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
																א
																ב
																ג
																ד
																ה

מספר תשובות נכונות: _____ מספר תשובות שגויות: _____ ציון: _____

שאלה 1

יהיו X, Y שני משתנים ב"ת שווי התפלגות. נניח ש $X \sim U(0,1)$ (אחיד רציף). מהו $P(X^2 > Y^2)$?

- א. יכול להיות שווה לכל מספר בקטע $(0,1)$.
- ב. יכול לקבל את הערך 1.
- ג. 0.5
- ד. בקירוב 0.5 .
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

נתונים אלה מתיחסים לשאלות 2-5. מסדרים בשורה את הודל, קיין ועוד $1 \leq n$ אנשים אחרים, כך שכל הסידורים הם שווי הסתברות. יהי X מספר האנשים שממוקמים בין הודל לקיין (לא דוקא בשכנות להודל ולקיין). עבור כל $1 \leq i \leq n$ יהי X_i אינדיקטור לכך שאדם i ממוקם בין הודל לקיין (לאו דוקא בשכנות אליהם).

שאלה 2

נניח ש $n = 10$.

- א. $0.03 < P(X = 8) \leq 0.05$
- ב. $0.06 < P(X = 8) < 0.08$
- ג. $0.08 < P(X = 8) < 0.09$
- ד. $0.09 < P(X = 8) \leq 0.1$
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 3

נניח ש $n = 10$ ושארדילס הוא אחד מעשרת האנשים האחרים. מהי ההסתברות שארדילס הוא אחד האנשים שממוקמים בין הודל לקיין בהינתן ש $(X = 5)$?

- א. 0.25
- ב. 0.5
- ג. 0.75
- ד. 0.4
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 4

עבור אילו ערכי n מתקיים $V(X) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$?

- א. רק עבור $n = 1$.
- ב. עבור $n \leq 2$.
- ג. עבור אף ערך של n .
- ד. עבור אין סוף ערכים אפשריים של n .
- ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 5

נניח ש $n = 10^6$.

- א. $P(X > 4 \cdot 10^5) > 0.5$
ב. $0.1 < P(X > 4 \cdot 10^5) < 0.15$
ג. $0.2 < P(X > 4 \cdot 10^5) < 0.25$
ד. $0.3 < P(X > 4 \cdot 10^5) < 0.35$
ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.
-

נתונים אלה מתיחסים לשאלות 6-8.

עבור כל $n \geq 1$ תהי $\{Y_{n,i}\}_{i=1}^n$ סדרת משתנים מקריים ב"ת ושוי התפלגות. עבור כל $n \geq 1$ יהי X_n משתנה מקרי שהוא ב"ת בסדרת המשתנים $\{Y_{n,i}\}_{i=1}^n$ ויהי Z_n משתנה מקרי שמקבל את הערך המכסימלי המתקבל על-ידי המשתנים שבסדרה $\{Y_{n,i}\}_{i=1}^n$. כך אם למשל לפחות אחד המשתנים שבסדרה קיבל את הערך 4 וכל יתר המשתנים קיבלו ערך שאינו גדול מ-4, אז $Z_n = 4$.

שאלה 6

נניח ש $Y_{n,1} \sim U(0,1)$ וש $X_n \sim U(0,n)$ (כל המשתנים הם אחידים רציפים).

- א. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 0$
ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 0.25$
ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 0.5$
ד. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 1$
ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 7

נניח ש $Y_{n,1} \sim \text{Bin}(n, 0.5)$ וש $X_n \sim \text{Bin}(n, 0.5)$.

- א. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 0$
ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 0.25$
ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 0.5$
ד. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 1$
ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 8

נניח ש $Y_{n,1} \sim U(0,1)$ (אחיד רציף) וש $X_n \sim N(0,n)$ (בעל התפלגות נורמלית).

- א. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 0$
ב. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 0.25$
ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 0.5$
ד. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > Z_n) = 1$
ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.
-

שאלה 9

נניח ש X הוא משתנה מקרי המקיים $P(X \geq 0) = 1$, $E(X) = 40$. מהו החסם העליון ההדוק ביותר שניתן לתת להסתברות המאורע $(X \geq 60)$ לפי נתונים אלה?

א. $\frac{2}{3}$

ב. $\frac{1}{3}$

ג. $\frac{2}{1}$

ד. $\frac{1}{3}$

ה. $\frac{1}{4}$

ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 10

נניח ש $X \sim \text{Bin}\left(80, \frac{1}{2}\right)$. מה ניתן להגיד על $P(X \geq 60)$?

א. $P(X \geq 60)$ שווה להסתברות שמשתנה המתפלג $\text{Bin}\left(800, \frac{1}{2}\right)$ יקבל ערך גדול מ 599.

ב. $P(X \geq 60)$ קטן מהחסם המתקבל בשאלה 9 ואפשרות א' בשאלה 10 לא נכונה.

ג. $P(X \geq 60)$ שווה לחסם המתקבל בשאלה 9 ואפשרות א' בשאלה 10 לא נכונה.

ד. $P(X \geq 60)$ גדול מהחסם המתקבל בשאלה 9 ואפשרות א' בשאלה 10 לא נכונה.

ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 11

מהי ההסתברות שנפח קוביה יהיה גדול מ 8 אם אורך צלע מתפלג $U[1,3]$ (אחיד בדיד)?

א. אין מספיק נתונים כדי לחשב.

ב. $\frac{1}{2}$

ג. $\frac{2}{3}$

ד. $\frac{1}{3}$

ה. $\frac{1}{3}$

ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 12

נתון גרף שלם לא מכוון בעל 5 צמתים. נותנים לכל אחת מקשתות הגרף בסיכוי שווה כיוון אחד מבין שני הכיוונים האפשריים שלה, וזאת באופן ב"ת בכיוונים הניתנים לקשתות האחרות. יהי p – ההסתברות שבגרף שנוצר אין מעגלים.

א. $p > 0.3$

ב. $0.25 < p < 0.3$

ג. $0.15 < p < 0.2$

ד. $0.1 < p < 0.15$

ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

נתונים אלה מתיחסים לשאלות 13-16.

תהי $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת משתנים שווי התפלגות. עבור כל n טבעי יהי $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. מספר טבעי k שעבורו קיים n שעבורו $S_n = k$ ייקרא מספר מוכר. עבור כל מספר טבעי m נסמן ב T_m את מספר המספרים הטבעיים המוכרים שלא גדולים מ m . עבור כל m טבעי יהי $Y_m = \frac{T_m}{m}$.

שאלה 13

נניח ש $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת וש $X_1 \sim U[1,6]$ (אחיד בדיד).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\left|Y_m - \frac{1}{3}\right| > 0.001\right) = 0 \quad \text{א.}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\left|Y_m - \frac{1}{3.5}\right| > 0.001\right) = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\left|Y_m - \frac{1}{2.5}\right| > 0.001\right) = 0 \quad \text{ג.}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(|Y_m - a| > 0.001) = 0 \quad \text{ד. לא קיים קבוע } a \text{ כך ש}$$

ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 14

נניח ש $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת וש $X_1 \sim U[0,6]$ (אחיד בדיד).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\left|Y_m - \frac{1}{3}\right| > 0.001\right) = 0 \quad \text{א.}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\left|Y_m - \frac{1}{3.5}\right| > 0.001\right) = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\left|Y_m - \frac{1}{2.5}\right| > 0.001\right) = 0 \quad \text{ג.}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(|Y_m - a| > 0.001) = 0 \quad \text{ד. לא קיים קבוע } a \text{ כך ש}$$

ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 15

נניח ש $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת וש $X_1 \sim U(1,6)$ (אחיד רציף).

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\left|Y_m - \frac{1}{3}\right| > 0.001\right) = 0 \quad \text{א.}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\left|Y_m - \frac{1}{3.5}\right| > 0.001\right) = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(Y_m > 0.001) = 0 \quad \text{ג.}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(|Y_m - a| > 0.001) = 0 \quad \text{ד. לא קיים קבוע ממשי } a \text{ כך ש}$$

ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.

שאלה 16

נניח ש $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ היא סדרת משתנים לא בהכרח ב"ת וש $X_1 \sim U(1,6)$ (אחיד רציף).

- א. יתכן שמתקיים $E(Y_{100}) > 0.5$.
 - ב. בהכרח מתקיים $E(Y_1) \geq E(Y_7)$.
 - ג. $\lim_{m \rightarrow \infty} P(Y_m > 0.001) = 0$ בהכרח מתקיים.
 - ד. יתכן שמתקיים $Cov(Y_1, Y_7) > 0$.
 - ה. כל האפשרויות הקודמות לא נכונות.
-