© כל הזכויות שמורות
מסמך זה נכתב על-ידי שלומי. אין להעתיקו או להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

# פתרון לבחינה מ 05.03.17

| 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| א | ג | א | ב | ב | א | ב | ד | ד | ג | ג | ב | ב | א | ג | ד |

## הסברים קצרים

**שאלה 1**

דרושים 3 כשלונות רצופים. ההסתברות לכך היא $(1-0.5)^3$ .

**שאלה 2**

$$E(2X-Y)=E(2X)-E(Y)=2E(X)-E(Y)=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

**שאלה 3**

בכל מקרה אחד מבין $X,Y$ מקבל את הערך המינימלי ואחר את הערך המכסימלי ( מקרה פרטי הוא ששניהם שווים ואז כל אחד מהם שווה גם למינימום וגם למכסימום ).

לכן מתקיים $E(W+Z)=E(X+Y)=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}=4$ .

**שאלה 4**

המינימום בין $X$ ו $Y$ מתפלג $G\left(\frac{3}{4}\right)$ ( בכל שלב שעד אליו לא היתה הצלחה, יש סיכוי של $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ שבו תהיה הצלחה ראשונה ). לכן מתקיים $P(W=3)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{64}$ .

**שאלה 5**

$$P(Z=3)=P(Z>2)-P(Z>3)=\left[P(X>2)+P(Y>2)-P(X>2,Y>2)\right]$$
$$-\left[P(X>3)+P(Y>3)-P(X>3,Y>3)\right]=$$
$$=\left[0.5^2+0.5^2-0.5^4\right]-\left[0.5^3+0.5^3-0.5^6\right]=\frac{13}{64}$$

**<u>שאלה 6</u>**

מדובר על תוחלת סכום של שלושה אינדיקטורים בעלי הסתברויות $0.5^2$ , $0.5^2$ ו
$0.5^2+0.5^2-0.5^4$ .

**<u>שאלה 7</u>**

לא יתכן שיתקבלו יותר מ 3 תוצאות שונות ב 4 הטלות. לכן, לפחות אחת מארבעת התוצאות לא תתקבל אף פעם. לכן המכפלה שווה לאפס בכל מקרה.

**<u>שאלה 8</u>**

צריך ליחס בדיוק 3 נקודות ממרחב המדגם לערך 1. לכן יש $\binom{6}{3}=20$ דרכים.

**<u>שאלה 9</u>**

$X_3 \sim Bin\left(3,\frac{1}{3}\right)$ ולכן $E(X_3)=3\cdot\frac{1}{3}$.

**<u>שאלה 10</u>**

נראה שהשונות המשותפת היא קבועה עבור כל $n$. מזה מתקבל שהגבול שווה לקבוע זה.

$$Cov(X_1,X_n)=Cov(X_1,X_1+(X_n-X_1))=Cov(X_1,X_1)+Cov(X_1,(X_n-X_1))=$$
$$=V(X_1)+0=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

( אין תלות בין ערכו של המהלך הראשון לערכם של המהלכים הבאים ).

**<u>שאלה 11</u>**

מגיעים לנקודה 3, בפעם שבה לראשונה משלימים שלושה צעדים ימינה. לכן הזמן עד הגעה לנקודה 3 מתפלג $NB\left(3,\frac{1}{3}\right)$ , והשונות היא $3\cdot\frac{2/3}{(1/3)^2}=18$.

**<u>שאלה 12</u>**

בהינתן ש $(X\le 1)$, אז הוא מתפלג $U(0,1)$ והתוחלת המותנה שלו היא $0.5$ .

לפי חישוב תוחלת שלמה, התוחלת של $Z$ היא $0.5\cdot 0.5+0.5\cdot\frac{0+2}{2}=\frac{3}{4}$ .

**<u>שאלה 13</u>**

בסיכוי חצי $Z$ מקבל את ערכו של $Y$, ואז למשל בסיכוי רבע הוא מקבל ערך גדול מ $1.5$

לכן בסיכוי שמינית $Z$ מקבל ערך גדול מ 1.5 . לכן עבור $n$ קבוע מתקיים $E(Z^n)\ge\frac{1}{8}\cdot 1.5^n$ ,

ולכן הגבול הוא אין סוף.

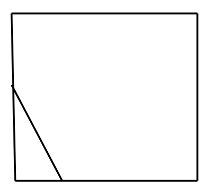
**<u>שאלה 14</u>**

$$P(Z\le 0.5\mid X\le 1.5)=\frac{P(X\le 1.5,Z\le 0.5)}{P(X\le 1.5)}=\frac{P(X\le 1,Z\le 0.5)+P(1<X\le 1.5,Z\le 0.5)}{P(X\le 1.5)}=$$

$$=\frac{P(X\le 0.5)+P(1<X\le 1.5,Y\le 0.5)}{P(X\le 1.5)}=\frac{1/4+1/4\cdot 1/4}{3/4}=\frac{5}{12}$$

**<u>שאלה 15</u>**

כדי שיתקיים $(X+Y+Z<1)$ צריך שיתקיים $(X\le 1)$ ואז מתקיים בכל מקרה $(Z=X)$. לכן מבוקשת הסתברות המאורע $(2X+Y<1)$. זוג המשתנים $X,Y$ מתפלג אחיד בתוך רבוע ששטחו $2\cdot 2=4$. התחום שבו מתקיים $(2X+Y<1)$ הוא המשולש שקודקודיו הם $(0,0),(0.5,0),(0,1)$. שטח משולש זה הוא $\frac{1}{4}$. לכן ההסתברות המבוקשת היא $\frac{1/4}{4}=\frac{1}{16}$.



**<u>שאלה 16</u>**

התוצאה ה-$i$ שמקבלים שווה ל $X_i+Z_i$ ( ערך המשתנה ועוד ערך הטעות ). לכן לכל תוצאה יש תוחלת $\mu+0=\mu$ ושונות $1+1=2$ ( הודות לאי תלות שונות הסכום שווה לסכום השונויות ).

לכן לכל $X_i+Z_i$ וגם לכל ממוצע של ערכים אלה יש תוחלת $\mu$, ולכן קיימים אומדים חסרי הטיה.

מכיון שהמשתנים $X_i+Z_i$ הם ב"ת, שווי התפלגות ובעלי שונות סופית, אז על על-פי החוק החלש, סדרת הממוצעים שלהם שואפת בהסתברות ל $\mu$, לכן סדרת הממוצעים היא סדרת אומדים עקיבה.

---

שלומי