פתרון הבחינה של פרופ' אהוד לרר מ 31/01/07

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
תשובה	א	ג	ב	ד	ד	ב	ג	א	ג	א	ג	א	ב	ה	ב

מספר הערות לגבי הפתרונות

שאלה 1:

המספר מתפלג $Bin\left(5,\frac{1}{2}\right)$.

$$\binom{5}{3}0.5^3 0.5^2$$

שאלה 2:

בסיכוי 0.5 ליאת וניר נולדו במחצית השניה של השנה ואז צריך שעוד אחד נוסף יולד במחצית השניה.
בסיכוי 0.5 ליאת וניר נולדו במחצית הראשונה ואז צריך שכל שלושת האחרים יולדו במחצית השניה.

$$0.5\binom{3}{1}0.5^1 0.5^2 + 0.5\binom{3}{3}0.5^3$$

שאלה 3:

הערכים האפשריים של Y_n הם -1 , 1 , 0 . לכן הפונקציה e^{tY_n} יכולה לקבל רק את הערכים 1 , e^t , e^{-t} . כאשר $n \to \infty$, ההסתברות ש Y_n יקבל את הערך 0 שואפת ל 1 . הפונקציה יוצרת מומנטים היא תוחלת (שקלול) של שלושה ערכים סופיים אפשריים. כאשר המשקל הניתן ל 1 שואף ל 1, אז השקלול שואף ל 1.

שאלה 4:

זהו חישוב של הסתברות מותנה.
A - זהו המפתח העשירי
B - זה לא אחד מתשעת הראשונים, זאת אומרת שזה או העשירי או אף אחד מהם

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.9\cdot 0.1}{0.9\cdot 0.1 + 0.1}$$

שאלה 5:

התוחלת המותנה של ההטלה הראשונה היא $\frac{2+4+6}{3}$, התוחלת המותנה של ההטלה הרביעית היא $\frac{3+6}{2}$ ושל כל אחת משתי האחרות $3.5 = \frac{1+6}{2}$ שזאת התוחלת הלא מותנה .

שאלה 6:

אם ההטלה הראשונה היא עץ אז מקבלים עץ לפני פלי. אם ההטלה הראשונה היא של פלי אז הכל תלוי בתוצאת ההטלה השניה של מטבע מאוזן. לכן ההסתברות היא $0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$.
ההסתברות לקבל רצף של 100 פלי לפני שמקבלים רצף של 200 עץ קרובה מאוד ל 1.

שאלה 7:

יהיו $X \sim \exp(\lambda)$ ו $Y \sim \exp(\mu)$ משתנים ב"ת

נשתמש בהסתברות שלמה. הסיכוי ש X יקבל ערך גדול מקבוע מסוים y הוא $e^{-\lambda y}$. נשקלל את ההסתברויות האלה לפי הצפיפות של המשתנה Y:

$$P(X > Y) = \int_0^\infty f_Y(y) P(X > y) dy = \int_0^\infty \mu e^{-\mu y} e^{-\lambda y} dy =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^\infty (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)y} dy = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

(האינטגרל האחרון הוא אינטגרל על פונקצית צפיפות של משתנה מעריכי ולכן הוא שווה ל 1).

שאלה 8:

כדי שהתוצאה 3 תהיה מכסימום זמני לפחות פעם אחת, צריך שיתקבל לראשונה 3 לפני שמתקבלים לראשונה 4,5,6 . אפשר לנחש שהסתברות זו היא $\frac{1}{4}$. אבל נבסס גם פתרון:

יהי a - הסיכוי שנקבל 3 לפני שנקבל 4,5,6 .

$$a = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{3}{6} \cdot 0 + \frac{2}{6} a$$

<u>הסבר</u>: מתנים בתוצאת ההטלה הראשונה. אם היא 3, אז קבלנו 3 לפני 4,5,6 . אם היא אחת מבין 4,5,6 אז לא קבלנו 3 לפניהן ואם היא 1 או 2 אז הסיכויים נשארו כמו שהיו בהתחלה.

שאלה 9:

כדי שאת כל אלה נקבל כמכסימום זמני לפחות פעם אחת, צריך שסדר ההופעות הראשונות של המספרים השונים יהיה: תחילה 1, ואחר-כך כל המספרים האחרים בסדר עולה.

שאלה 10:

$$\phi\left(\frac{1-0.5}{1}\right) - \phi\left(\frac{-1-0.5}{1}\right) = \phi(0.5) - 1 + \phi(1.5)$$

שאלה 11:

מכיוון ש Y מקבל רק ערכים שבין -1 ל $+1$ ולא רק -1 ו $+1$ אז $E(Y^2) < 1$ וכך $V(Y) < 1$.

שאלה 12:

$$E(|X-1|)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)(k-1)+P(X=0)\cdot 1=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)(k-1)+2P(X=0)=$$
$$=E(X)-1+\frac{2}{e}$$

שאלה 13:

ממוצע רבועי הסטיות מהתוחלת הוא השונות שהיא כאן 1. לא יתכן שאחד מהערכים יתרום $1=\frac{1}{9}\cdot 3^2=\frac{1}{9}(3.5-0.5)^2$ לממוצע רבועי הסטיות, זאת כי מתקבלים ערכים שונים ולכן גם הערכים האחרים תורמים לממוצע רבועי הסטיות.

שאלה 14:

שונות של סכום 10 משתנים שווי התפלגות בלתי תלויים היא $10\cdot Var(X_1)=10\frac{(6-1+1)^2-1}{12}$.

שאלה 15:

קבוצת הערכים האפשריים שיכולה לקבל פונקצית ההסתברות המצטברת היא הקטע $\left[\frac{1}{8},\frac{3}{4}\right)$ ובנוסף הנקודות המבודדת 0 ו 1. שימו לב שהקטע הוא חצי פתוח.
כל נקודה בתוך הרבוע או על שפתו שאינה הקודקוד הימני העליון, היא קטנה לפחות בקורדינטה אחת מלפחות שניים מקודקודי הרבוע. לכל קודקוד יש הסתברות $\frac{1}{8}$.
למשל הנקודה $(1,0.99)$ קטנה בלפחות קורדינטה אחת מהנקודה $(1,0)$ וגם מהנקודה $(1,1)$.
לעומת זאת הנקודה $(0.1,0.1)$ גדולה בשתי הקורדינטות רק מהנקודה $(0,0)$ מבין הנקודות ששתי הקורדינטות שלהן הן שלמות.

שלומי