פתרון הבחינה של פרופ' אהוד לרר מ 23/03/07

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
תשובה	ב	ב	א	ד	ד	ב	ג	א	א	ב	ג	א	ג	ב	ג

מספר הערות לגבי הפתרונות

שאלה 1:

$$\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4}$$

שאלה 2:

$$\frac{1}{5}\left((-2)^3+(-1)^3+1^3+2^3+5^3\right)=\frac{1}{5}\cdot5^3$$

שאלה 3:

$$\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot3$$

שאלה 4:

כדי לשחק בגמר טוטנהאם צריכה לנצח שלושה משחקים רצופים. ההסתברות לכך היא 0.5^3.
לפי גישה אחרת, בגמר משחקות בדיוק שתי קבוצות ולכל קבוצה יש סיכוי שווה לשחק בגמר ולכן הסיכוי הוא $\frac{2}{16}$.

שאלה 5:

טוטנהאם מגרילה את בדיוק אחת מהקבוצות האחרות. כל אחת בסיכוי שווה.

שאלה 6:

A - טוטנהאם תגיע לשלב של 8 האחרונות
B - ניוקאסל תגיע לשלב של 8 האחרונות

$$P\left(A\cap\bar{B}\right)=P(A)P\left(\bar{B}|A\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{15}\right)$$

אם טוטנהאם מגיעה לשלב של 8 האחרונות, אז 7 קבוצות נוספות מתוך 15 הקבוצות האחרות מגיעות לשלב זה.

שאלה 7:

אם X מקבל ערך בין 0 ל 2, אז המאורע $(X > Y)$ לא יכול להתרחש. אם X מקבל ערך $2 \le x \le 3$ אז כדי שיתקיים $(X > Y)$, Y צריך לקבל ערך בין 2 ל x. ל X יש צפיפות $\frac{1}{3}$ בקטע.

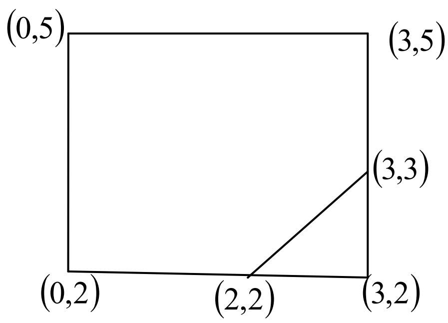
$$\int_0^2 \frac{1}{3}\cdot 0dx + \int_2^3 \frac{1}{3}\cdot\frac{x-2}{3}dx = \frac{1}{18}$$

או אינטואיטיבית: דרוש ש X יקבל ערך בין 2 ל 3 ו Y יקבל ערך בין 2 ל 3 בהינתן שזה קורה הסיכוי כל אחד מהמשתנים מתפלג אחיד בקטע זה ומשיקולי סימטריה ההסתברות היא $\frac{1}{2}$.

לכן ההסתברות היא $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$.

אפשר גם לפתור בדרך גיאומטרית:

ההתפלגות היא אחידה ברבוע ששטחו 9 ודרוש שתתקבל נקודה בתוך המשולש שקוקודיו הם $(2,2)$, $(3,2)$, $(3,3)$.



שאלה 8:

לפי חישוב הסתברות שלמה נקבל הסתברות $\frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\binom{4}{3}\cdot\frac{1}{2}$

שאלה 9:

יש לחשב הסתברות מותנה.

A - נבחר המטבע הראשון

B - התקבלו 4 תוצאות "עץ"

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\binom{4}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{4}\cdot 1^4}$$

שאלה 10:

$$P(Y=0)P(X>2) + P(Y=1)P(X>1) = \frac{1}{2}P(X>2) + \frac{1}{2}P(X>1) = \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-1}$$

<u>שאלה 11</u>:
<u>הערה</u>
לגבי משתנה מקרי, לא דוקא למשתנה שהוא בעל התפלגות זהה לשלו יש את ההסתברות הגבוהה יותר לקבל ערך זהה לשלו. נמחיש זאת על-ידי דוגמא: אם משתנה ראשון מקבל את הערך 1 בסיכוי 0.3 ואת הערך 2 בסיכוי 0.7 , אז למשתנה בעל אותה התפלגות ובלתי תלוי בו, יש סיכוי של $0.3\cdot 0.3+0.7\cdot 0.7=0.58$ לקבל אותו ערך. לעומת זאת למשתנה שבהכרח מקבל את הערך 2, יש סיכוי של 0.7 לקבל את אותו ערך.

צריך להביא למכסימום את

$$\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}\cdot 0.5\cdot 0.5^{k-1}=0.5p\sum_{k=1}^{\infty}(0.5q)^{k-1}=\frac{0.5p}{1-0.5q}=\frac{0.5p}{0.5+05p}=1-\frac{0.5}{0.5+0.5p}$$

(מסכמים את ההסתברויות ש X יקבל ערך k ו Y יקבל את אותו ערך k על פני ערכי k השונים).

והפונקציה מונוטונית עולה.
נתן אינטואיציה לתוצאה: ככל שהפרמטר יותר קטן, גדל הפיזור של המשתנים וכך קטן הסיכוי שהם יקבלו את אותו ערך.

<u>שאלה 12</u>:
X - מספר הרצפים, $E(X)=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=2$, $P(X\geq 4)\overset{Markov}{\leq}\frac{E(X)}{4}=\frac{1}{2}$

(בכל זוג רצוף הסיכוי לרצף מתאים הוא $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, יש 8 זוגות רצופים ותוחלת הסכום של האינדיקטורים שווה לסכום התוחלות שלהם).

<u>שאלה 13</u>:
X – מיקומו בשלב ה-900, $E(X)=900(0.5\cdot 1+0.5(-1))=0$,

$$V(X)=900\left(0.5\cdot 1^2+0.5(-1)^2-0^2\right)=900$$

לפי משפט הגבול המרכזי $P(X\geq 45)\cong 1-\phi\left(\frac{44.5-0}{\sqrt{900}}\right)$

<u>שאלה 14</u>:
כדי להיות בנקודה $+10$ לאחר 55 צעדים הוא חייב לבצע 55 צעדים ימינה ו 45 צעדים שמאלה. הוא ביצע 55 צעדים ימינה ו 45 צעדים שמאלה לכן ההסתברות היא 0.55 (הצעד צריך הוא אחד מ 100 צעדים שנעשו וש 55 מהם הם ימינה).

<u>שאלה 15</u>:

$$V(6X_1)+\sum_{k=7}^{10}V(X_k)=6^2V(X_1)+4V(X_1)=40\cdot\frac{(6-1+1)^2-1}{12}$$

(שש התוצאות הראשונות הן למעשה מכפלה של קבוע 6 במשתנה אחיד, עבור כל קבוע c וכל משתנה X מתקיים $V(cX)=c^2V(X)$, השונות של משתנה אחיד בדיד $X\sim U[a,b]$ היא $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$).

שלומי