פתרון הבחינה של פרופ' אהוד לרר מ 26/09/06

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
תשובה	ג	ב	ה	ב	ב	ג	ב	ב	ג	ד	א	ה	א	א	א

מספר הערות לגבי הפתרונות

שאלה 1:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 8+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2$$

שאלה 2:

A - ליאת בחרה בשורה הראשונה
B - ליאת קבלה תשלום של 2

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}$$

שאלה 3:

מתקיים $E(X)=n/2$ ולכן $E\left(\frac{X}{n}\right)=0.5$.

מתקיים $V(X)=n\cdot 0.5\cdot 0.5$. מכיון שעבור כל קבוע c מתקיים $V(cX)=c^2V(X)$ אז $V\left(\frac{X}{n}\right)=\frac{V(X)}{n^2}=\frac{1}{4n}$.

בשימוש באי שיוויון צ'בישב נקבל

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-0.5\right|\geq 0.1\right)\leq\frac{V\left(\frac{X}{n}\right)}{0.1^2}=\frac{\frac{1}{4n}}{0.1^2}\leq\frac{1}{16}$$

שאלה 4:

נעשה שימוש במשפט הגבול המרכזי. הודות לסימטריות שקיימת כאן, ההסתברות לסטייה מסוימת מהתוחלת כלפי מעלה שווה להסתברות לסטייה בגודל זה כלפי מטה.

$$\lim_{n\to\infty} 2\left(1-\phi\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right)\right)$$

שאלה 5:
במאורע הנדרש, יש !2 אפשרויות לחלק את שני המכתבים שמגיעים ל B בין שתי המעטפות שמיועדות ל B ויש !3 אפשרויות לחלק את המכתבים המיועדים ל C בין שלושת המעטפות שמיועדות ל C.
מתקבלת הסתברות

$$\frac{3!\cdot 2!\cdot 1!}{6!}$$

שאלה 6:
המכתב שמיועד ל A יגיע אליו בסיכוי $\frac{1}{6}$. כל אחד משני המכתבים שמיועדים ל B יגיע אליו בסיכוי $\frac{2}{6}$.

כל אחד מהמכתבים שמיועדים ל C יגיע אליו בסיכוי $\frac{3}{6}$.

תוחלת מספר המכתבים שיגיעו ליעדם הנכון שווה לסכום התוחלת של אינדיקטורים. מתקבל פתרון:

$$1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{3}{6}$$

שאלה 7:
נאמר בזמן הבחינה שמניחים שהמשתנים בלתי תלויים.
הנקודה נבחרת בהתפלגות אחידה ברבוע ששטחו 1. נדרש שהיא תבחר בתוך רבע עיגול שרדיוסו 1 ושטחו $\frac{\pi}{4}$. לכן ההסתברות של המאורע היא $\frac{\pi}{4}$.
(מכיון שמגרילים את הנקודה באופן אחיד, אז ההסתברות שהיא תמצא בתוך תחום מסוים שווה לשטח התחום חלקי השטח הכולל שממנו נבחרת הנקודה שהוא כאן 1).

שאלה 8:
בהינתן $(X=x)$, ההסתברות שיתקיים $(Y<x^2)$ היא x^2 (בגלל ש x^2 הוא בכל מקרה בין 0 ל 1 ול Y יש התפלגות אחידה בתחום זה).
ההסתברות השלמה לכך ש $(Y<x^2)$ היא

$$\int_0^1 f_X(x)\left(P(Y<x^2)\right)dx=\int_0^1 x^2 dx$$

שאלה 9
מתקיים $\lim_{x\to\infty} P(Y\le -x)=0$ ולכן בודאי $\lim_{x\to\infty} P(X\le x, Y\le -x)=0$.

שאלה 10:
נניח ש

$$P(X=0,Y=1,Z=0)=P(X=0,Y=0,Z=1)=$$
$$P(X=1,Y=0,Z=0)=P(X=1,Y=1,Z=1)=\frac{1}{4}$$

במקרה זה לכל אחד משלושת האינדיקטורים יש הסתברות 0.5 ובנוסף X בלתי תלוי ב Y וגם X בלתי תלוי ב Z (אך שלושת המשתנים אינם בלתי תלויים) אך הסכום בכל מקרה אי-זוגי.
ב' לא נכון- אפשר שההסתברות תהיה 0.5 גם אם המשתנים אינם בלתי תלויים. נתן דוגמא לכך:
X בלתי תלוי באחרים ומבין שני האחרים בהכרח בדיוק אחד מהם שווה ל 1. כך הסכום הוא זוגי אם"ם $(X=1)$ וזה קורה בסיכוי 0.5 .

שאלה 11
המכסימום מקבל את הערך 6, אם לא כל התוצאות קטנות מ 6. הסיכוי שכל התוצאות קטנות מ 6 הוא $\left(\frac{5}{6}\right)^{100}$.

$$E(\max)\geq P(\max=6)\cdot 6+P(\max<6)\cdot 1>P(\max=6)\cdot 6=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{100}\right)\cdot 6$$

(ב 100 הטלות ב"ת ההסתברות שתתקבל לפחות פעם אחת תוצאה של 6 היא קרובה ל 1).

שאלה 12:
תוצאה אחת נותנת אינדיקציה על זהות המטבע ולכן נותנת גם אינדיקציה לתוצאות אחרות.
הממוצע לא שואף לתוחלת. בסיכוי חצי הממוצע שואף ל $\frac{1}{3}$ ובסיכוי חצי הוא שואף ל $\frac{2}{3}$.
התוחלת המותנה של X_{11} בהינתן שעשרת הניסיונות הראשונים הסתיימו בתוצאה אפס, היא קרובה יותר ל $\frac{1}{3}$ מאשר ל $\frac{2}{3}$, אך אין ודאות שמדובר במטבע מסוים ולכן היא אינה $\frac{1}{3}$.

שאלה 13:
יהיו X ו Y אינדיקטורים של המאורעות A ו B . מתקיים $P(A)=P(B)$.
מכיון שמושיבים את כולם סביב מעגל, אז לליאת יש בדיוק שני שכנים. הסיכוי שאדם יהיה אחד השכנים שלה הוא $\frac{2}{9}$.
המכפלה XY היא אינדיקטור שמקבל את הערך 1 במקרה שגם ליאת יושבת ליד אדם וגם אילה יושבת ליד גולן. מרחב המדגם של סידור סביב מעגל הוא בגודל !9. אם יש שני גושים של ליאת ואדם ושל אילה וגולן, אז יש בסך הכל (יחד עם האנשים האחרים) 8 גושים שאותם ניתן לסדר ב !7 צורות. אבל, יש גם 2 סידורים פנימיים של כל אחד משני הזוגות.
נחשב את השונות המשותפת שלהם.

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2!\cdot 2!\cdot 7!}{9!}-\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}$$

מקדם המתאם הוא מכפלה בקבוע חיובי של השונות המשותפת שלהם. לכן יש לו את אותו סימן כמו להם.

אם ליאת יושבת ליד אדם אז קטן הסיכוי של כל אחד מהם לשבת ליד אילה. לכן גדל הסיכוי של כל אחד אחר כולל גולן לשבת ליד אילה.

שאלה 14:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

(התפלגות מספר ההופעות של A היא בינומית).

שאלה 15:

A - הכדור הראשון לבן

B - הכדור השני לבן

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{7}+\left(1-\frac{5}{10}\right)\cdot\frac{3}{7}}$$

שלומי