פתרון הבחינה של פרופ' אהוד לרר מ 05/02/06

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
תשובה	ב	ד	ה	ד	ג	ג	ג	ב	ד	א	ה	ב	ב	ד	ד

מספר הערות לגבי הפתרונות

שאלה 1:
א' לא נכון כי קיים ערך x שמתקבלים ערכים מימינו בהסתברות חיובית. עבור ערך x זה מתקיים עבור כל ערך y, $F_{X,Y}(x,y)<1$.
ב' נכון כי כאשר $y\to-\infty$ אז ההסתברות לקבל ערך קטן ממנו שואפת לאפס. לכן בודאי כאשר $y\to-\infty$ ההסתברות לקבל ערך של Y שהוא גם קטן ממנו וגם ערך של X שקטן מאיזשהו קבוע, גם שואפת לאפס.
דוגמא נגדית ל ג': $P(X=1,Y=1)=1$
דוגמא נגדית ל ד': $P(X=1,Y=2)=P(X=2,Y=1)=0.5$

שאלה 2:
נניח ש $X_3=X_4=X_5=X_6=X_7$ והם בלתי תלויים ב X_1 וב X_2 אז סכום חמשת המשתנים האחרונים הוא למעשה מכפלה של משתנה בודד ב 5. שונות של מכפלת משתנה בקבוע שווה לרבוע הקבוע כפול שונות המשתנה. לכן, שונות הסכום של חמשת המשתנים האחרונים היא $5^2\cdot0.5\cdot0.5$ ושונות הסכום כולו היא $0.5\cdot0.5+0.5\cdot0.5+5^2\cdot0.5\cdot0.5$

שאלה 3:
סכום שני המשתנים מקבל ערכים בקטע שבין 0 ל 2. שימו לב שהתפלגות הסכום סימטרית סביב 1 ולכן, $P(X+Y<1)=0.5$.

נחשב את התוחלת המותנה של $\frac{1}{X+Y}$ בהינתן ערך של y:

$$E\left(\frac{1}{X+Y}\mid Y=y\right)=\int_0^1\frac{1}{x+y}dx=\ln(1+y)-\ln(y)$$

וכעת נחשב את התוחלת השלמה:

$$E\left(\frac{1}{X+Y}\right)=\int_0^1(\ln(1+y)-\ln(y))dy<\infty$$

אילו היה מתקיים שהתוחלת שווה לאינסוף בהינתן ש $(X+Y<1)$, אז גם התוחלת הלא מותנה היתה שווה לאינסוף זאת כי ההסתברות שסכום המשתנים קטן מ 1 היא חיובית ויש הסתברות חויבית למאורע $(X+Y<1)$.

שאלה 4:

בדומה להוכחת אי שיוויון מרקוב, השיקול כאן הוא כמותי. לא יתכן שלמאורע $(X \geq 2)$ תהיה הסתברות גדולה מידי, מבלי שהתוחלת תהיה גדולה מידי. נשתמש בחסמים שכל ערך אי שלילי הוא לפחות 0 וכל ערך שגדול או שווה ל 2 הוא לפחות 2.

$$1 = E(X) \geq P(X=10)\cdot 10 + P(0 \leq X \leq 2)\cdot 0 + P(X \neq 10, X \geq 2)\cdot 2$$
$$\Rightarrow \quad P(X \neq 10, X \geq 2) \leq 0.25 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(X \geq 2) = P(X=10) + P(X \geq 2, X \neq 10) \leq 0.25 + 0.05 = 0.3$$

שאלה 5:

בהינתן $(X = x)$ התוחלת המותנה של y היא $\frac{x+1}{2}$.

לכן התוחלת השלמה של Y היא $E(Y) = E(E(Y \mid X = x)) = E\left(\frac{X+1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

שאלה 6:

בהינתן $(Y = 4)$, X היה יכול לקבל את הערכים שאינם קטנים מ 4 שהם 4,5,6.

למשל ההסתברות המותנה ש $(X = 5)$ היא:

$$\frac{P(X=5, Y=4)}{P(Y=4)} =$$
$$= \frac{P(X=5)P(Y=4|X=5)}{P(X=4)P(Y=4|X=4) + P(X=5)P(Y=4|X=5) + P(X=6)P(Y=4|X=6)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}}$$

$$E(X|Y=4) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}\cdot 4 + \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}\cdot 5 + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}\cdot 6$$

(שקללנו את שלושת הערכים האפשריים לפי ההסתברויות המותנות).

שאלה 7:

לסכום של משתנים ב"ת יש פונקציה יוצרת מומנטים ששווה למכפלת הפונקציות יוצרות מומנטים שלהם.

למשתנה מקרי מנוון ששווה בהכרח ל 1 יש פונקציה יוצרת מומנטים e^t.

למשתנה אינדיקטורי בעל הסתברות 0.5 יש פונקציה יוצרת מומנטים $0.5e^t + 0.5$ ולכן למשתנה $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$ שהוא סכום של חמישה אינדיקטורים ב"ת יש פונקציה יוצרת מומנטים $(0.5e^t + 0.5)^5$.

המשתנה X הוא סכום של משתנה $B\left(5,\frac{1}{2}\right)$ ומשתנה שהוא קבוע 1. לכן הוא מקבל את הערך 2 אם"ם המשתנה הבינומי מקבל את הערך 1. ההסתברות לכך היא $\binom{5}{1}\cdot 0.5\cdot 0.5^4$.

<u>שאלה 8</u>:

יהי $X=\sum_{i=1}^{5}X_i$ כאשר X_i הם אינדיקטורים לקבלת תוצאה ששווה ל 1 או ל 2 בהטלה ה- i.

יהי $Y=\sum_{j=1}^{5}Y_j$ כאשר Y_j הם אינדיקטורים לקבלת תוצאה ששווה ל 2 או ל 3 בהטלה ה- j .

מתקיים $Cov(X,Y)=Cov\left(\sum_{i=1}^{5}X_i,\sum_{j=1}^{5}Y_j\right)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}Cov(X_i,Y_j)$

מכיון שהטלות שונות הן ב"ת, אז עבור $i\neq j$ מתקיים $Cov(X_i,Y_j)=0$.

מכיון שהתוצאות של הטלות שונות הן שוות התפלגות אז מתקיים עבור כל $1\le i\le 5$:

$$Cov(X_i,Y_i)=Cov(X_1,Y_1)$$

ומתקיים $Cov(X,Y)=5Cov(X_1,Y_1)$.

מתקיים $Cov(X_1,Y_1)=E(X_1Y_1)-E(X_1)E(Y_1)=\frac{1}{6}-\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}$

(X_1 ו Y_1 הם כל אחד אינדיקטורים בעלי הסתברות $\frac{2}{6}$ להצלחה, המכפלה שלהם היא אינדיקטור שמקבל את הערך 1 רק אם תוצאת ההטלה היא 2).

לסיכום:

$$\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}=\frac{\sum_{i=1}^{5}Cov(X_i,Y_i)}{\sqrt{5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}}=\frac{5\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\right)}{5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$$

<u>שאלה 9</u>:

דוגמא שמראה שיתכן ערך גדול מ 0.5 :

נניח ש X_7 הוא תוצאת ההטלה של קוביה הוגנת.

כל היתר הם זהים אחד לשני. הם שווים ל X_7-1 אם $(X_7\ge 2)$ ושווים ל 6 אם $(X_7=1)$.

במקרה זה רק בסיכוי $\frac{1}{6}$ התוצאות האחרות גדולות מ X_7 ואחרת הן קטנות ממנו.

<u>שאלה 10</u>:

ההתפלגות של Y היא $G\left(1-e^{-1}\right)$:

התפלגות מעריכית היא חסרת זכרון. מתקבל $(Y=y)$ אם $y-1\le X<y$. בהינתן שהגענו לנקודה $y-1$, המשתנה המעריכי יקבל ערך בין קטן מ y בהסתברות $1-e^{-1}$. זהו הפרמטר של ההתפלגות הגיאומטרית.

כדי שהמשתנה Y יקבל ערך טבעי מסויים y , צריך המשתנה *המעריכי* לקבל ערך בקטע $(y-1,y]$.

כדי שהוא יקבל ערך בקטע כזה, צריך שהמשתנה המעריכי לא יקבל הצלחה עד קטע זה, ויקבל הצלחה בקטע זה. מכיון שלמשתנה המעריכי יש את תכונת חוסר הזכרון, אז הסיכוי שהוא יקבל ערך בקטע בהינתן שעד שם הוא לא קבל הצלחה, הוא קבוע. בכל קטע יש סיכוי מסוים קבוע לקבל הצלחה בהינתן שהגענו לקטע זה. כדי ש Y יקבל את ערכו בקטע זה, צריך סדרת כשלונות בכל הקטעים הקודמים שמצורה זו.

הסבר אחר לפי פונקצית ההסתברות המצטברת של המשתנה המעריכי:

$$P(y-1 \le X < y) = F_X(y) - F_X(y-1) = \left((1-e^{-y}) - (1-e^{-(y-1)})\right) = e^{-y}\left(1-e^{-1}\right)$$

נסביר גם מדוע לחלק השברי z יש תוחלת שקטנה מחצי: למשתנה שמתפלג אחיד, זאת אומרת שיש לו צפיפות קבועה בקטע שבין 0 ל 1, יש תוחלת 0.5 . אבל למשתנה זה יש צפיפות יורדת מונוטונית בקטע שבין 0 ל 1. כדי שהוא יקבל ערך בנקודה מסוימת, צריך להכשל עד אותה נקודה ושאז תהיה הצלחה באותה נקודה. ככל שהנקודה הזאת היא בעלת ערך יותר גדול, אז ההסתברות להיכשל עד אותה נקודה קטנה. למשתנה מעריכי יש פונקצית צפיפות מונוטונית יורדת, ולכן עבור ערכי z גדולים יותר מתקבל צפיפות נמוכה יותר. בכל קטע שבין שני שלמים עוקבים, הצפיפות בנקודה מסוימת קטנה מהצפיפות בנקודה יותר קטנה.

שאלה 11:

המשתנים מקבלים את הערכים 1,8,10 בהסתברויות חיוביות (יש בנקודות אלה קפיצות של פונקצית ההסתברות המצטברת).

המשתנים יכולים לקבל גם ערכים אחרים. אבל, מכיון שכל אחד מהערכים האחרים מתקבל בהסתברות אפס, אז ההסתברות שהמשתנה Y ישתווה לערך של המשתנה X בנקודות אלה היא אפס.

לכן ההסתברות המבוקשת שווה ל $P(X=1,Y=1)+P(X=8,Y=8)+P(X=10,Y=10)$

הודות לאי תלות שבין המשתנים, הסתברויות החיתוך שוות למכפלות של ההסתברויות ונקבל,

$$P(X=1)\cdot P(Y=1)+P(X=8)\cdot P(Y=8)+P(X=10)\cdot P(Y=10) = 0.2^2+0.1^2+0.1^2$$

שאלה 12:

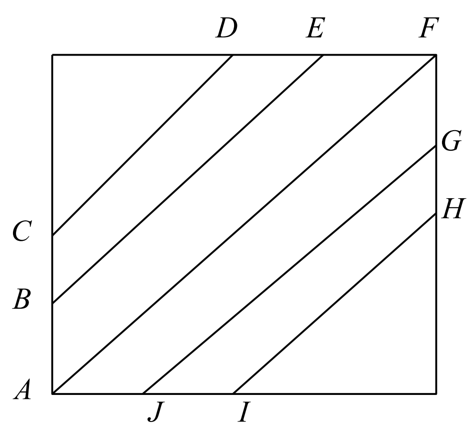
נתן פתרון גאומטרי. קבוצת זוגות הזמנים שבהם חיים ומשה מגיעים נמצאת על רבוע יחידה. מכיון שהתפלגות הזמנים היא אחידה, אז לכל מאורע יש הסתברות ששווה לחלק של שטחו מתוך השטח הכולל של הרבוע.

המאורע שהם נפגשו הוא המצולע שקוקודיו הם $CDFHIA$.

המאורע שאף אחד מהם לא חיכה יותר מרבע שעה מתואר על-ידי המצולע $BEFGJA$.

ההסתברות המותנה שווה להסתברות החיתוך חלקי ההסתברות של מאורע שבו מתנים.

כאן החיתוך מתואר על-ידי המצולע הקטן שמוכל בגדול.



שאלה 13:

ל S_{2n} יש תוחלת n וסטיית תקן $\sqrt{\frac{n}{2}}$. כאשר $n \to \infty$, מספר סטית התקן של הערך $\frac{n}{3}$ שואף לאינסוף. לכן, ההסתברות שנקבל ערך קטן מ $\frac{n}{3}$ שואפת לאפס.

שאלה 14:

בהתפלגות $G\left(\frac{1}{2}\right)$ מתקיים עבור כל m שלם: $P(X>m)=0.5^m$ (דרושים m כשלונות).

נמצא את ההסתברות המבוקשת על-ידי שימוש בהסתברות שלמה. המשתנה X מקבל את הערך k בהסתברות $0.5\cdot0.5^{k-1}=0.5^k$. אם הוא מקבל את הערך k, אז המשתנה Y צריך לקבל ערך גדול מ $2k$.

לכן כאן ההסתברות השלמה היא: $\sum_{k=1}^{\infty}0.5^k\cdot0.5^{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}0.5^{3k}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}$.

שאלה 15:

יהי a שווה לסכויי חיים לנצח לאחר שזכה במשחק האחרון ועדין לא נפלה הכרעה בסדרה.
יהי b שווה לסכויי חיים לנצח לאחר שהפסיד במשחק האחרון ועדין לא נפלה הכרעה בסדרה.
אם חיים זכה במשחק האחרון ועדיין לא נפלה הכרעה, אז אם הוא ינצח במשחק הבא אז תושג הכרעה לטובתו ואם משה ינצח במשחק הקרוב, אז נעבור למצב שמשה זכה במשחק האחרון שבו סיכויו של חיים הם b, במצב זה חיים יוכל להציל את הסדרה, רק אם יזכה במשחק שלאחריו.
מתקיים:

$$\begin{cases} a=\frac{2}{3}\cdot1+\frac{1}{3}\cdot b \\ b=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}\cdot0 \end{cases}$$

מכאן $a=\frac{6}{7}$ ו $b=\frac{4}{7}$.

לפני התחלת הסדרה, אף אחד לא זכה במשחק. בסיכוי של $\frac{2}{3}$ עוברים למצב שחיים זכה במשחק האחרון ובסיכוי $\frac{1}{3}$ למצב שמשה זכה במשחק האחרון. כך סיכויו של חיים לפני שהתחילה הסדרה הם

$$\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{16}{21}$$

שלומי