הוכחת עיקרון ההכלה וההפרדה

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)\mp\cdots$$

האיברים ממרחב המדגם שנכללים ב $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הם האיברים שכלולים בלפחות אחת מהקבוצות A_i. כל איבר כזה צריך להימנות בדיוק פעם אחת באגף ימין.

נניח שאיבר שיך ל m מהקבוצות A_i, נרצה להראות שהוא ימנה בדיוק פעם אחת עבור כל m נתון. הוא מוכל בחיתוך של כל m הקבוצות האלה וגם בחיתוך של כל k תת קבוצות של הקבוצה הזאת בת m איברים. יש $\binom{m}{k}$ אוספים של תת קבוצות בגודל k של הקבוצה בגודל m. כאשר באגף ימין עוברים על תתי הקבוצות בגודל k, אז האיבר הזה נמנה בכל החיתוכים של k קבוצות שכולן מוכלות ב m הקבוצות. עבור k אי זוגי, הוא נסכם עם סימן + ועבור k זוגי הוא נסכם עם סימן -.

קיימת זהות קומבינטורית שאומרת ש $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}=0$ (הוכחת זהות זו מתבססת על נוסחת הבינום של ניוטון).

האיבר כלול בכל תת קבוצה של m הקבוצות, להוציא את הקבוצה הריקה. לכן הוא נספר $\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}$ פעמים. אך

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}=\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}\right)-\binom{m}{0}(-1)^{0+1}=0-(-1)=1$$

שלומי