שאלה

בוחרים באקראי, בסיכוי שווה את אחת מהמילים באורך 10 שמורכבות רק משלושת האותיות a,b,c .

א. מהי ההסתברות שכל אחת מהאותיות האלה תופיע לפחות פעם אחת ?

ב. מהי ההסתברות שכל אחת מהאותיות האלה תופיע לפחות פעמיים ?

פתרון

$|\Omega| = 3^{10}$ (לגבי כל מקום יש 3 אפשרויות).

א. $|A| = 3^{10} - 3\cdot 2^{10} + 3 - 0$

(השתמשנו בעקרון ההכלה וההפרדה. יש 2^{10} מילים שלא כוללות למשל את האות a. לכן סכום ההסתברויות שאות מסוימת לא תופיע הוא $3\cdot 2^{10}$. יש מילה אחת שבה a ו b לא מופיעות. כך יש 3 מילים שבהן זוג אותיות לא מופיעות. אין אף מילה שבה כל שלושת האותיות לא מופיעות).

$$p = |A|/|\Omega|$$

ב. <u>דרך ראשונה</u>- שימוש בעקרון ההכלה וההפרדה

יהי E המאורע שלפחות אחת לא מיוצגת לפחות פעמיים.

מאורע זה מורכב מאיחוד המאורעות $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$ שהם המאורעות שאות מסוימת לא מופיעה או שהיא מופיעה פעם אחת.

$$P(A_0) = P(B_0) = P(C_0) = \frac{2^{10}}{3^{10}}$$

כדי שאות אחת תופיע בדיוק פעם אחת צריך לבחור לה מקום מבין עשרת המקומות, וביתר המקומות לבחור אות מבין שתי האחרות. לכן $P(A_1) = P(B_1) = P(C_1) = \frac{10\cdot 2^9}{3^{10}}$.

אם שתי אותיות לא מופיעות בכלל אז כל האותיות הן מהסוג השלישי.

לכן $P(A_0 \cap B_0) = \frac{1}{3^{10}}$.

יש $10 \cdot 9$ אפשרויות למצוא מקום בודד לכל אחת משתי אותיות נתונות.

לכן $P(A_1 \cap B_1) = \frac{10\cdot 9}{3^{10}}$.

יש 10 אפשרויות לבחור מקום לאות בודדת. לכן $P(A_1 \cap B_0) = \frac{10}{3^{10}}$.

לכן מתקיים $P(E) = 3\cdot\frac{2^{10}}{3^{10}} + 3\cdot\frac{10\cdot 2^9}{3^{10}} - 3\cdot\frac{1}{3^{10}} - 3\cdot\frac{10\cdot 9}{3^{10}} - 6\cdot\frac{10}{3^{10}}$.

מבוקש $1 - P(E)$.

<u>דרך שניה</u>

בדרך הזאת ננצל את העובדה שבגלל שבמילה יש רק 10 אותיות, אז מספר האפשרויות להקצות מכסות לאותיות השונות הוא לא גדול.

מספר מצבים מסוג זה	ג	ב	א
3	2	2	6
6	2	3	5
3	3	3	4
3	2	4	4

$$|B| = 3\cdot\binom{10}{6}\cdot\binom{4}{2} + 6\cdot\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{3} + 3\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{3} + 3\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}$$

$$p = |B| / |\Omega|$$

למשל, יש 3 מצבים שבהם ספרה אחת מופיעה 6 פעמים וכל אחת מהאחרות מופיעה פעמיים, יש 6 =!3 מצבים שבהם ספרה אחת מופיעה 5 פעמים, אחרת מופיעה 3 פעמים ושלישית מופיעה פעמיים. ברגע שמקצים לכל אות מספר מסוים של הופעות, אז רק צריך לבחור את המקומות שבהן כל אות תיוצג. כך למשל, אם אות אחת מופיעה 6 פעמים ושתי אותיות אחרות מופיעות פעמיים כל אחת, אז צריך לבחור את ששת המקומות שבהן אחת תופיע ואחר-כך יש לבחור מבין יתר המקומות את המקומות שבהן אות אחרת תופיע.

<u>בעית המזכירה הרשלנית</u>

מזכירה צריכה לשלוח n מכתבים ל n אנשים שונים. כל מכתב אמור להיכנס למעטפה מסוימת. חל בלבול והמזכירה מכניסה כל מכתב למעטפה אקראית (לכל מעטפה בדיוק מכתב אחד).

<u>שאלה</u>

מהי ההסתברות שכל האנשים יקבלו את המכתב שמיועד להם ?

<u>פתרון</u>

$\frac{1}{n!}$ - מבוקש סידור אחד מסוים מתוך $n!$ סידורים אפשריים.

<u>שאלה</u>

מהי ההסתברות שלפחות אדם אחד יקבל את המכתב שמיועד לו ?

<u>הערה</u>

המשלים של "לפחות אדם אחד יקבל את המתאים" הוא "אף אחד לא יקבל את המתאים לו".
המשלים איננו "כל אחד יקבל את המתאים לו".

<u>פתרון</u>

יהי A_i - המאורע שהאדם ה- i יקבל את המכתב הנכון. אנו מחפשים את הסתברות האיחוד של המאורעות האלה. יש n מאורעות כאלה.

באופן טבעי ההסתברות של כל אחד מהם היא $\frac{1}{n}$ (צריך לקבל אחד מסוים מתוך n מכתבים).

נראה זאת גם בדרך אחרת: $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ (אדם מקבל את המתאים לו ואת יתר המכתבים אפשר לחלק בכל צורה בין האחרים).

מהי ההסתברות לחיתוך שני מאורעות ? תשובה: $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$ כי יש שניים שמקבלים את שלהם ולגבי היתר אפשר לסדר בכל צורה.

מהי ההסתברות לחיתוך של k מאורעות ? תשובה: $\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{k}k!}$ כי יש k שמקבלים את המתאים להם, ואת היתר אפשר לחלק בכל צורה .

נחשב את הסתברות האיחוד לפי עקרון ההכלה וההפרדה.

יש $\binom{n}{k}$ קבוצות של k מאורעות מתוך n מאורעות. הסתברות האיחוד היא:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{\binom{n}{k}k!}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\cdots\pm(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

<u>הערה</u>

כאשר $n\to\infty$ הטור הזה שואף ל $1-\frac{1}{e}$. לכן כאשר מספר האנשים שואף לאין סוף, ההסתברות שואף אחד לא יקבל את המכתב שמיועד לו, שואפת ל $\frac{1}{e}$.

<u>שאלה</u>

בבחירות השתתפו 10 בוחרים. דן קיבל 8 קולות ורמי קיבל 2 קולות. מהי ההסתברות שדן לא היה אף פעם בפיגור במהלך ספירת הקולות ?

<u>פתרון</u>

נחשב את הסתברות המשלים.

דן יכול להיות בפיגור לאחר ספירת הקול הראשון. אם הוא לא יהיה בפיגור לאחר הקול הראשון אז הוא גם לא יהיה בפיגור לאחר הקול השני. עדיין הוא יכול להיות בפיגור לאחר ספירת הקול השלישי (אם הקול השני והשלישי הם לרמי). אחר-כך הוא כבר לא יכול להיות בפיגור. לכן בסך הכל הוא יהיה בפיגור באיזשהו שלב אם הקול הראשון הוא לרמי או אם הקול השני והשלישי הם לרמי.

המאורע שדן היה בפיגור הוא איחוד המאורעות A_1 - שהוא היה בפיגור לאחר הקול הראשון, A_2 - שהיה בפיגור לאחר הקול השני ו A_3 - שהיה בפיגור לאחר שלושת הקולות הראשונים. אבל אם הוא היה בפיגור לאחר הקול השני, אז בודאות הוא היה בפיגור גם לאחר הקול הראשון. לכן מבוקשת הסתברות האיחוד של המאורע הראשון והשלישי. מתקיים $A_1\cup A_3=A_1\cup(A_3\setminus A_1)$ כאשר A_1 ו $A_3\setminus A_1$ הם זרים. לכן לאיחודם יש הסתברות ששווה לסכום ההסתברויות שלהם.

$P(A_1)=\frac{\binom{2}{1}}{\binom{10}{1}}=\frac{2}{10}$ - הקול הראשון צריך להיבחר מבין שני הקולות של רמי.

$P(A_3\setminus A_1)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{2\cdot 1}{10\cdot 9}$ - שני הקולות, השני והשלישי צריכים להיבחר מבין הקולות של רמי.

לכן ההסתברות המבוקשת היא $\frac{2}{10}+\frac{2\cdot 1}{10\cdot 9}$.

לכן ההסתברות המבוקשת בשאלה היא $1-\left(\frac{2}{10}+\frac{2\cdot 1}{10\cdot 9}\right)$.

שלומי