פתרון מקוצר לבחינה של ד"ר רון פלד מ 31/07/13

חלק א

סעיף א

לגבי כל ילד, הסיכוי שהוא לא יכיר אף אחד הוא $(1-p)^{n-1}$. תוחלת סכום האינדיקטורים שווה לסכום תוחלתם.

סעיף ב

X_i - אינדיקטור לכך שליד i אין חברים. מתקיים $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$Var(X)=Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\overset{1}{=}n\cdot Var(X_1)+2\binom{n}{2}Cov(X_1,X_2)$$

(1. האינדיקטורים הם שווי התפלגות ושווי התפלגות משותפת).

$$Var(X_1)=(1-p)^{n-1}\left(1-(1-p)^{n-1}\right)$$
$$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)$$
$$E(X_1)+E(X_2)=(1-p)^{n-1}$$
$$E(X_1X_2)=(1-p)(1-p)^{n-2}(1-p)^{n-2}$$

סעיף ג

המאורע שיש ילד שלו אין חברים הוא איחוד של 10 מאורעות שלילד מסוים אין חברים.
הסתברות איחוד אף פעם לא גדולה מסכום ההסתברויות.
ההסתברות שלילד מסוים אין חברים היא $(1-0.25)^9<0.076$.

סעיף ד

$(X>0)$ הוא מאורע שהוא איחוד 10 מאורעות של 0 חברים לילדים השונים. חסם עליון הוא סכום ההסתברויות של המאורעות פחות סכום ההסתברויות של החיתוכים של זוגות המאורעות: כך כל התרחשות של בדיוק מאורע אחד נסכמת פעם אחת בדיוק וכל חיתוך של יותר ממאורע אחד לא נחשב יותר מפעם אחת, כי הוא מוחסר עבור כל זוג מבין המאורעות (עבור כל קבוצת מאורעות, מספר הזוגות לא קטן ביותר מ 1 מאשר מספר המאורעות).
סכום ההסתברויות הוא $10(1-0.25)^9<0.76$. סכום ההסתברויות של החיתוכים הוא $\binom{10}{2}0.75^8 0.75^8 0.75$.

<u>הערה</u>

ניתן לפתור גם בעזרת אי שיוויון צ'בישב החד צדדי.

חלק ב

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
א	ב	ג	ב	ב	א	ג	א	א	ד	ג	ג

הסברים קצרים

שאלה 1

זהו זרם פואסוני שעובר פיצול.

שאלה 2

תוחלת סכום של משתנים $P(\lambda p)$ ו $P(\lambda q)$.

שאלה 3

מדובר בסכום של משתנים פואסונים תלויים. אם יותר פרטים מסוג A נקנו, זה מרמז על כך שהגיעו יותר קונים ולכן זה מגדיל את הסיכוי שיקנו יותר פרטים מסוג B.
אם למשל $p=q=1$, אז כל אדם שבא לחנות קונה מתנות משני הסוגים. לכן במקרה זה, מספר המתנות הנקנות הוא בהכרח זוגי. משתנה שמקבל רק ערכים זוגיים אינו משתנה פואסוני.

שאלה 4

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\big(1-(1-p)(1-q)\big)^k=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}(p+q-pq)^k=$$
$$=e^{-\lambda}/e^{-\lambda(p+q-pq)}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda(p+q-pq)}\frac{\big(\lambda(p+q-pq)\big)^k}{k!}=e^{-\lambda(1-p-q+pq)}$$

(בתוך הסיגמא האחרונה רשום סכום הסתברויות של משתנה $P\big(\lambda(p+q-pq)\big)$).

שאלה 5

סידור מסוים של $n+m$ כדורים, כך שהסדר הפנימי של כדורים מאותו צבע לא חשוב.

שאלה 6

ככל שמשתנה אחד מקבל ערכים גדולים יותר, כן יש פחות כדורים שיכולים לתרום למשתנה האחר. לכן המתאם שלילי.

שאלה 7

כל כדור נכנס למקום זה בסיכוי $\frac{1}{n+1}$. מדובר על תוחלת סכום של m אינדיקטורים.

שאלה 8

$\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ הוא קבוע ולכן המתאם בינו לבין כל משתנה הוא 0.

$$0 = Cov\left(X_1, \sum_{i=1}^{n+1} X_i\right) = Cov(X_1, X_1) + \sum_{i=2}^{n+1} Cov(X_1, X_i) = V(X_1) + n \cdot Cov(X_1, X_2)$$

(המשתנים הם שווי התפלגות ושווי התפלגות משותפת).

שאלה 9

$$\rho(X_1, X_2) = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{V(X_1)}$$

שאלה 10

אפשרי למשל $P(X = 0.5) = 1$ ולכן אפשר ערך 1.

נגדיר משתנה $Y = 1 - X$. Y מקבל רק ערכים אי שליליים ולכן נוכל להשתמש באי שיוויון מרקוב. $E(Y) = 1 - E(X) = 0.5$.

$$P(X \le 0.25) = P(Y \ge 0.75) \le \frac{E(Y)}{0.75} = \frac{2}{3}$$

שאלה 11

$$V(XY) = E\left((XY)^2\right) - E^2(XY) \overset{1}{=} E(X^2)E(Y^2) - E^2(X)E^2(Y) \overset{2}{=} E(X^2)E(Y^2) =$$
$$= \left(E(X^2) - 0^2\right)\left(E(Y^2) - 0^2\right) = \left(\left(E(X^2) - E^2(X)\right)\left(E(Y^2) - E^2(Y)\right)\right)$$

(1. על סמך אי תלות , 2. $E(X) = 0$)

אבל, זה לא נכון כללית. אם למשל המשתנים הם בעלי התפלגות $Bin(1, p)$, אז מתקיים $V(X) = V(Y) = 0.5 \cdot 0.5$ ו $V(XY) = 0.25 \cdot 0.75$.

שאלה 12

אם עבור אף לא זוג ערכים (x, y) מתקיים $P(X = x, Y = y) > P(X = x)P(Y = y)$, אז מתקיים יחס שיוויון עבור כל צרוף (x, y) (אילו במקרה מסוים, היה מתקבל יחס של "קטן מ" ואף פעם לא היה מתקיים יחס של "גדול מ", אז סכום הערכים הפנימיים בטבלה, לא היה 1).

שלומי