פתרון הבחינה של פרופ' צירלסון מ 27.09.05

1. ההתפלגות היא $B\left(n,\frac{1}{n}\right)$.

2. $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ זאת ההסתברות שכל אחד מהכדורים יכנס לכד אחר מכד 1.

3. $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$ זאת ההסתברות שכל אחד מהכדורים יכנס לכד אחר מכדים 1 ו 2.

4. אם כד אחד ריק אז קטנים הסכויים שגם כד אחר ריק לכן המתאם הוא שלילי.

5. התוחלת היא סכום n תוחלות של אינדיקטורים שלכל אחד מהם יש הסתברות $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

סכום זה שווה ל $\frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$.

6. השונות של N שווה לסכום של n שונויות של אינדיקטורים וסכום של שונויות משותפות.
מכיון שהשונויות המשותפות הן שליליות (ראו תשובה 4), אז
$$Var(N) < n\cdot P(X=0)\cdot P(X\neq 0)$$

7. $Var\left(\frac{N}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(N)$. לפי התשובה הקודמת $Var(N)$ גדל לכל היותר לינארית, לכן המנה שואפת לאפס כאשר n שואף לאינסוף.

---

8. המאורע B מכיל את המאורע A . שני מאורעות בעלי הסתברות גדולה מאפס וקטנה מאחד שאחד מהם מכיל את השני אינם בלתי תלויים.

9. דרוש שלא תהיה אף לא הצלחה נוספת. לכך יש הסתברות $(1-p)^9$.

10. $$P(X=1\mid B) = \frac{P(X=1,B)}{P(B)} = \frac{P(X=1)}{P(B)} = \frac{10p(1-p)^9}{1-(1-p)^{10}}$$

11. נתון שיש הצלחה אחת בניסוי הראשון. בנוסף כל אחד מהניסויים הבאים הוא הצלחה בסכוי p ,
לכן התוחלת היא $1+9p$.

12. $$E(X\mid B) = \sum P(X=k\mid B)\cdot k = \frac{1}{P(B)}\sum P(X=k)\cdot k = \frac{E(X)}{P(B)} = \frac{10p}{1-(1-p)^{10}}$$

13. $\frac{E(X-1\mid B)}{E(X-1\mid A)} = \frac{\frac{10p}{1-(1-p)^{10}}-1}{9p}$. את הגבול כאשר $p\to 0$ ניתן למצוא על-פי כלל לופיטל.

---

14. לכל אחד מ $2^7 = 128$ הצירופים יש הסתברות שווה. לכן ההסתברות היא $\frac{4}{128} = \frac{1}{32}$.

15. בהינתן שמאירים 5 קטעים אז יש $\binom{7}{5} = 21$ צירופים אפשריים שהם שווי הסתברות.

רק אחד מהם (הצירוף 2) הוא הצלחה. לכן ההסתברות היא $\frac{1}{21}$.

16.
$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^6\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^7}{\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^7}=\frac{1}{16}$$

17. עבור כל p בקטע זה, בהינתן שמאירים 5 קטעים, יש $\binom{7}{5}$ צירופים שווי הסתברות שהצירוף 2

הוא אחד מהם. לכן $g(p) = \frac{1}{\binom{7}{5}}$ לכל p בקטע.

18.
$$\frac{0.5\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^6\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^7\right)}{0.5\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^6\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^7\right)+0.5\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^6\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^7\right)}$$

$$=\frac{1}{17}$$

שלומי