פתרון מקוצר לבחינה של ד"ר רון פלד מ 27/08/12

חלק א

סעיף א

יהי $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ כאשר X_i הוא אינדיקטור לנקודת שבת במקום ה- i.

עבור על $1\le i\le n$, X_i הוא אינדיקטור בעל הסתברות של $\frac{1}{n}$. לכן, בגלל שתוחלת סכום שווה תמיד לסכום התוחלות, אז $E(X)=1$.

עבור כל $1\le i\le n$ מתקיים $Var(X_i)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

עבור כל $1\le i,j\le n$ מתקיים $Cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E(X_i)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$

מתקיים $Var(X)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+\sum_{i,j}Cov(X_i,X_j)$

סעיף ב

כאמור $Var(X)=1$, $E(X)=1$. לפי אי שיוויון צ'בישב מתקיים $P(|X-1|\ge 6)\le\frac{Var(X)}{6^2}$.

סעיף ג

מבוקשת ההסתברות של סידור מסוים של k מספרים כאשר את יתר המספרים אפשר לסדר בכל אחד מ $(n-k)!$ סידורים.

סעיף ד

לא יתכן שיהיו יותר משני מעגלים באורך $n/2$. לכן מבוקשת ההסתברות לכך שיהיו שני מעגלים או מעגל אחד.

ההסתברות b- שיהיו שני מעגלים היא

$$b=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n/2+1}{n/2+2}\cdot\frac{1}{n/2+1}\cdot\frac{n/2-1}{n/2}\cdot\frac{n/2-2}{n/2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{n^2}$$

נמצא גם את $a+b$ שהיא ההסתברות שיהיו מעגל אחד או שניים.

תוחלת מספר הסדרות באורך $n/2$ שמהוות מעגל היא

$$\binom{n}{n/2}\left(\frac{n}{2}\right)!\frac{(n/2)!}{n!}=1$$

בכל מעגל באורך $\frac{n}{2}$ יש $\frac{n}{2}$ סדרות שהן מעגל. לכן תוחלת מספר המעגלים היא $\frac{2}{n}$.

מתקיים $\frac{2}{n}=a+2b$. את b כבר חישבנו. לכן נוכל לחלץ את $a+b$.

חלק ב

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ג	ד	ד	ג	ג	ב	א	ב	ב	ד	א	ג

הסברים קצרים

שאלה 1

N מתפלג אחיד.

שאלה 2

או ש 29 הראשונים הם שמאל ומיד אחר-כך חוזרים לראשית או ש 31 הראשונים הם כל השמאל ואחד ימין ומיד אחר-כך חוזרים לראשית.

לכן ההסתברות היא $\frac{1}{70}\cdot\frac{\binom{30}{30}\binom{70}{1}}{\binom{101}{31}}+\frac{1}{72}\cdot\frac{\binom{30}{29}}{\binom{101}{29}}$.

שאלה 3

X יכול לקבל ערכים שליליים, לכן הוא לא בעל אף אחת מהתפלגויות אלה.

שאלה 4

משיקולי סמטריה, כל פתק מתקבל אחר הפתק של חזרה לראשית, בסכוי $\frac{1}{2}$.

לכן תוחלת סכום המסעים לאחר החזרה לראשית היא $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 70-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 30$.

שאלה 5

מבוקש $E(XN)-E(X)E(N)$.

$$E(N)=\frac{1+101}{2}=51 \quad , \quad E(X)=20$$

$$E(X\mid N)=(101-N)\left[\frac{70}{100}\cdot 1+\frac{30}{100}\cdot(-1)\right]$$

$$E(XN)=E(N\cdot E(X\mid N))$$

כאשר $E(N^2)=Var(N)+E^2(N)=\frac{(101-1+1)^2-1}{12}+51^2$

שאלה 6

$$B(36,0.2+01)$$

שאלה 7

כל ניצחון משתייך או לקבוצת מיוחדים (שמשון) או ליתר.

שאלה 8

כל אחד מארבעת המשחקים של שמעון שבהם הוא לא ניצח, הוא ניצחון לקבוצה ב'

בהסתברות $\frac{0.1}{0.1+0.7}$. כל אחד מ 30 המשחקים האחרים של קבוצה ב' הוא ניצחון של

קבוצה ב' בהסתברות 0.1. לכן, התוחלת המותנה היא $4\cdot\frac{0.1}{0.1+0.7}+30\cdot0.1$

שאלה 9

מתקיים $Cov(X,Y)=\sum_{i,j}Cov(X_i,Y_j)$. הודות לאי תלות בין השחקנים שמאותה קבוצה

ושיוויון בין ההתפלגויות המשותפות, זה נותן $6Cov(X_1,Y_1)$.

נגדיר $Z_1=1-X_1$. מתקיים $Cov(X_1,Y_1)=-Cov(Z_1,Y_1)$

$$E(Z_1)=0.8^6 \quad , \quad E(Y_1)=6\cdot0.2=1.2$$

בגלל שתמיד אחד משני המשתנים הוא 0 אז מתקיים $E(Z_1Y_1)=0$.

לכן $Cov(Z_1,Y_1)=-0.8^6\cdot1.2$

שאלה 10

נפריד למקרים שהמשחק שבינהם מוכרע או לא מוכרע.

$$0.2\cdot0.8^5\binom{5}{1}0.1\cdot0.9^4+0.1\cdot0.9^5\binom{5}{1}0.2\cdot0.8^4+0.7\binom{5}{1}0.2\cdot0.8^4\binom{5}{1}0.1\cdot0.9^4$$

שאלה 11

הערה: המאורעות אינם בהכרח זרים.

נראה ש א' ו ב' לא מתקימים: נניח שיש מרחב מדגם שבו 3 נקודות $1,2,3$ שלכל אחת מהן

יש הסתברות $\frac{1}{3}$, $X(1)=X(2)=0$, $X(3)=5$. נתייחס לשני המאורעות: הראשון שלא

התקבל 1 והשני שלא התקבל 2.

נראה שג' לא מתקיים: נניח ש X מקבל את הערכים 1,2,3 ושהוא בעל תוחלת 2.9 .

גם בהינתן שהוא לא שווה ל 1 וגם בהינתן שהוא לא שווה ל 2, התוחלת המותנה גבוהה

מתוחלתו הלא מותנה.

שאלה 12

אם ההגבלה היא ל m מאורעות, אז יש הסתברות $\frac{1}{m}$ לכל אחד מהם.

נראה שלא א': נניח שיש מרחב מדגם שבו כל אחת מארבעת נקודותיו 1,2,3,4 מתקבלת

בסיכוי שווה. נניח ש $X(1)=X(2)=8$, $X(3)=X(4)=9$. בהינתן המאורע A שהוא

$\{1,2,3\}$, ההתפלגות של X אינה אחידה.

שלומי