פתרון הבחינה של פרופ' צירלסון מ 23/10/00

1. $E\left((-1)^{S_n}\right) \overset{\text{אי תלות}}{=} \left(E(-1)^{X_1}\right)^n = \left(q\cdot(-1)^0 + p(-1)^1\right)^n = (q-p)^n$

2. $E\left((-1)^{S_n}\right) = 1\cdot P\left(S_n \text{ זוגי}\right) + (-1)\cdot P\left(S_n \text{ לא זוגי}\right) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (q-p)^n = P\left(S_n \text{ זוגי}\right) - \left(1 - P\left(S_n \text{ לא זוגי}\right)\right) = 2\cdot P(A_n) - 1$

$\Longrightarrow P(A_n) = \frac{1+(q-p)^n}{2}$

3. $E\left(S_n\cdot(-1)^{S_n}\right) = E\left(\left(\sum X_i\right)\cdot(-1)^{\sum X_i}\right) = n\cdot E\left(X_1\cdot(-1)^{\sum X_i}\right) =$

$\overset{\text{אי תלות}}{=} n\cdot E\left(X_1\cdot(-1)^{X_1}\right)\cdot E\left((-1)^{\sum_{i=2}^{n} X_i}\right) =$

$= n\cdot\left(p\cdot 1\cdot(-1)^1 + q\cdot 0\cdot(-1)^0\right)\cdot(q-p)^{n-1} = -n\cdot p(q-p)^{n-1}$

4. $E\left(S_n / A_n\right) = \frac{E(S_n\cdot A_n)}{P(A_n)}$. מכיון ש $A_n = \frac{1+(-1)^{S_n}}{2}$ אז,

$E(S_n\cdot A_n) = E\left(S_n\cdot\frac{1+(-1)^{S_n}}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[E(S_n) + E\left(S_n\cdot(-1)^{S_n}\right)\right] =$

$= \frac{n\cdot p}{2} - \frac{1}{2}np(q-p)^{n-1}$

והפתרון הוא $n\cdot p\cdot\frac{1-(q-p)^{n-1}}{1+(q-p)^n}$

5. $\frac{E(S_n/A_n)}{E(S_n)} = \frac{1-(q-p)^{n-1}}{1+(q-p)^n}$

והגבול הוא תמ׳ 1 כי $\lim_{n\to\infty}(q-p)^n = 0$ $\lim_{n\to\infty}(q-p)^{n-1} = 0$!

שלומי

6. כן אם דוגמים עם החזרה או בלי החזרה, אפשרי שלשתי משתנים שונות תהיה קורלציה כאשר שווה ל 1, לכן בכל מקרה לא נכון.
אם דוגמים עם החזרה אז יש אי תלות בין הקורלציות של שתי המשתנים. אם דוגמים ללא החזרה אז יש תלות כי אם $(X_1=1)$ זה מקטין את הסיכוי ל $(X_2=1)$.

7. אם המדגם הוא עם החזרה אז יש אי תלות בין כל 8 הקורלציות של ארבעת המשתנים. אם הדגימה היא בלי החזרה אז לא יתכן שגם $(S=4)$ וגם $(T=4)$ כי המשתנה $(1,1)$ לא יכולה להבחר יותר מפעם אחת.

8. בכל מקרה יש אי תלות, זאת כי לפי כל משתנה, בהינתן כל ערך של X_i, התוחלת של Y_i היא $2.5=\frac{1+4}{2}$.

9. אם מדגמים דגימה עם החזרה אז יש בכל מקרה אי תלות מלאה בין $2\cdot 4=8$ הקורלציות השונות ומתקיים עבור כל s $V(T|S=s)\overset{!}{=}V(T)$. אם דוגמים ללא החזרה זה לא נכון כי למשל $(T=1+2+3+4)\Longleftarrow(S=4)$ $\Longleftarrow$ $V(T|S=4)=0$.

10. ללא החזרה יש תלות, כי הרי שלמשל $(T=10)\Longleftarrow(S=4)$. עם החזרה, כאמור כל הקורלציות בלתי תלויות וגם הסכומים בלתי תלויים.

11. בכל מקרה: $E(S)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)=10$.

12. עם החזרה, אז השונות שווה לסכום השונויות (ה cov הם אפס). בלי החזרה, ככל שהערך של X_i גדל יותר, אז בממוצע הערך של X_j קטן יותר עבור $i\neq j$, לכן כל ה cov הם שליליים והשונות קטנה מסכום השונויות. סכום השונויות שווה ל $4\cdot\frac{(4-1+1)^2-1}{12}=5$ וזאת השונות במקרה של עם החזרה.

שלומי

13. זה התפלגות של X היא שקלול בין התפלגויות בינומיות, בהינתן $Y=y$ אז ל X התפלגות בינומית $B(n,y)$.

14. כאמור בהינתן $Y=y$, $X\sim B(n,y)$ לכן:
$E(X|Y)=n\cdot Y$ ו $V(X|Y)=n\cdot Y(1-Y)$.

15. על פי נוסחת פירוק השונות:
$$V(X)=V(E(X|Y))+E(V(X|Y))=V(nY)+$$
$$+E(n\cdot Y(1-Y))=n^2\cdot V(Y)+n\cdot E(Y(1-Y))$$

16. $E(X)=n\cdot E(Y) \Longrightarrow E(Y)=\frac{m}{n}$

17. גם אם Y מקבל רק ערך אחד, למשל 0.5, הטענה לא נכונה כי אז ל Y אין שונות חיובית ממש, אבל ל X יש שונות חיובית ממש. אם Y מקבל רק את הערך 0 או רק את הערך 1 אז השונות של Y וגם של X היא אפס, אבל אם Y יכול לקבל את שניהם, אז $V(X)=V(nY)=n^2\cdot V(Y)$.
לכן אף טענה לא נכונה.

18. לפי נוסחת פירוק השונות והתשובה לשאלה 15 הטענה נכונה אמ"מ $V(Y)=0$ וזה קורה רק כאשר Y מקבל ערך אחד בלבד.

19. לפי התשובה לשאלה 15: $V(\frac{1}{n}X)=V(Y)+\frac{E(Y(1-Y))}{n}$
לכן עבור $n=1$
$$V(X)=V(Y)+E(Y)-E(Y^2)=E(Y)-E^2(Y)=E(Y)(1-E(Y))$$
אבל הטענה נכונה לא רק במקרה זה אלא גם אם $P(Y=0)=1$ כי אז לכל n $E(Y)=0$ ו $V(\frac{1}{n}X)=0$!
הטענה לא נכונה תמיד כי $V(Y)+\frac{E(Y(1-Y))}{n}$ היא יורדת כאשר n עולה עבור התפלגות ספציפית של Y, בזמן ש- $E(Y)(1-E(Y))$ היא קבועה כאשר n משתנה.

---

20. $E(Z)=n_1\cdot p_1+n_2\cdot p_2$ ו Z אי שלילי לכן לפי אי-שוויון מרקוב $P(Z\geq\alpha)\leq\frac{n_1\cdot p_1+n_2\cdot p_2}{\alpha}$. הטענה ש- $Z\sim B(n_1+n_2,p)$ אינה נכונה כאשר X ו Y תלויים, גם כאשר $p_1=p_2=p$.

שלומי