פתרון מקוצר לבחינה של פרופ' מלכסון ופרופ' צירלסון מ 20/03/09

שאלה 1

X_1 ו X_2 תלויים אך X_1 ו- Y_1 בלתי תלויים.
למשל $P(X_1=10 \mid X_2=5)=0 \neq P(X_1=10)$. אין תלות בין זריקת הזוגיים לזריקת האי-זוגיים.

שאלה 2

מ"מ X_1+X_2 בעל התפלגות בינומית, וגם מ"מ X_1+Y_1 בעל התפלגות בינומית.

$$X_1+Y_1 \sim B\left(20,\frac{1}{3}\right) \;,\; X_1+X_2 \sim B\left(10,\frac{2}{3}\right)$$

שאלה 3

היפרגאומטרית

$HG(9;10,10)$

שאלה 4

בינומית

$B\left(9,\frac{1}{2}\right)$ כי מי שהלך לכד 1 או לכד 2 הלך לכד 1 בסיכוי $\frac{1}{2}$.

שאלה 5

בינומית

אין תלות בין מה שקורה לגבי הזוגיים לבין מה שקורה לגבי האי-זוגיים. לכן מתקבלת ההתפלגות הלא מותנה.

שאלה 6

$\frac{1}{N}$

לכל מספר יש את אותו סיכוי

שאלה 7

$$\frac{2}{N}-\frac{1}{N^2}$$

$\frac{1}{N}+\frac{1}{N}-\left(\frac{1}{N}\right)^2$ לפי הכלה והפרדה או בדרך אחרת $1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2$.

שאלה 8

$$\frac{M}{N}\left(1-\frac{1}{2N}\right)$$

$$M\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{M}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^2$$

שאלה 9

גדולה יותר מאשר בשאלה 8

לכל אחד יש את אותו סיכוי לנחש נכון. אבל כעת הסיכוי שמשהו כלשהו ינחש נכון הוא גדול יותר כי אין חפיפות.

שאלה 10

אף לא אחת מהתשובות

בהינתן A , $X-1$ הוא מספר המנחשים נכון מבין $n-1$ אנשים שניחושיהם אינם בלתי תלויים. לכן ההתפלגות המותנה של $X-1$ היא $B\left(n-1,\frac{1}{N}\right)$.

שאלה 11

$$\frac{M}{N}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)$$

$$\frac{N-1}{N}\cdot 0+\frac{1}{N}M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1-k}=$$

$$=\frac{M}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\left(\frac{1}{N}\right)^{k+1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1-k}\overset{I}{=}$$

$$\frac{M}{n}\left(1-\binom{n}{0}\left(\frac{1}{N}\right)^0\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)=\frac{M}{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)$$

I . איבר אחד חסר מפיתוח בינום.

שאלה 12

$B\left(8,\frac{1}{3}\right)$

בהינתן $\left(X_1=3\right)$ מתקיים $P\left(X_k<2\cdot 3\cdot 3\right)=\frac{1}{3}$ לכל $k\geq 2$.

שאלה 13

4

$$P\left(X_k<2X_1-3\right)=\sum_{X_1=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot P\left(X_k<2X_1-3\right)=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E\left(N\right)=8\cdot\frac{1}{2}=4$$

שאלה 14

אף לא אחת מהתשובות

בהינתן $X_1=1{,}2$ אז N הוא משתנה מנוון שמקבל רק ערך 0. למשתנה מנוון יש שונות אפס. בהינתן $X_1=5{,}6$ אז N הוא משתנה מנוון שמקבל רק את הערך 8. כאשר $\left(X_1=3\right)$ אז $N\sim B\left(8,\frac{1}{3}\right)$ וכאשר $\left(X_1=4\right)$ אז $N\sim B\left(8,\frac{2}{3}\right)$. בשני המקרים האלה השונות המותנה היא $8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$.

לכן יש שני ערכים לשונות המותנה.

שאלה 15

4

$$P\left(X_1=3\mid N=3\right)=\frac{P\left(X_1=3,N=3\right)}{P\left(N=3\right)}=\frac{\frac{1}{6}\binom{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^5}{P\left(N=3\right)}$$

$$P\left(X_1=4\mid N=3\right)=\frac{P\left(X_1=4,N=3\right)}{P\left(N=3\right)}=\frac{\frac{1}{6}\binom{8}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^5}{P\left(N=3\right)}$$

שאלה 16

$\frac{4}{5}$

$$\frac{\frac{1}{6}\binom{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^5}{0+0+\frac{1}{6}\binom{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^5+\frac{1}{6}\binom{8}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^5+0+0}=\frac{4}{5}$$

שאלה 17

$\frac{2}{5}$

$$P\left(X_{10}<2X_1-3 \mid N=3\right)=$$
$$=P\left(X_1=3 \mid N=3\right)P\left(X_{10}<2\cdot 3-3\right)+P\left(X_1=4 \mid N=3\right)P\left(X_{10}<2\cdot 4-3\right)=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$$

שאלה 18

$P\left(X\geq 1000\right)\leq 0.1$ לפי אי-שיוויון מרקוב.

מספר ההטלות עד קבלת 100 עצים מתפלג $NB\left(100,\frac{1}{2}\right)$ ולכן הוא בעל תוחלת 200. מספר הפלים הוא הזזה ב -100 של מספר ההטלות. לכן הוא בעל תוחלת 100. לכן לפי אי-שיוויון מרקוב נקבל חסם של $\frac{100}{1000}$. השונות של מספר ההטלות הנדרש היא $100\cdot\frac{0.5}{0.5^2}=200$. מכיון שמספר הפלים הוא הזזה בקבוע של מספר ההטלות אז שונותו גם שווה ל 200. באי שיוויון צ'בישב לא ניתן כאן להפעיל שיקולי סימטריה.

שאלה 19

$P\left(X\geq 80\right)\approx 0.92$

לפי קירוב נורמלי, תשובה מקורבת היא $\phi\left(\frac{100-79.5}{\sqrt{200}}\right)=1-\phi\left(\frac{79.5-100}{\sqrt{200}}\right)$.

שלומי