פתרון הבחינה של פרופ' מלכסון ופרופ' צ'ירלסון מ 17/2/09

.1 $\dfrac{e}{e-1}$

$$E(X|X\ge 1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k|X\ge 1)\cdot k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P(X=k)\cdot k}{1-P(X=0)}=$$

$$=\frac{E(X)}{1-e^{-1}}=\frac{1}{1-e^{-1}}=\frac{e}{e-1}$$

.2 $\dfrac{e(e-2)}{(e-1)^2}$

$$E(X^2|X\ge 1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k|X\ge 1)\cdot k^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P(X=k)\cdot k^2}{1-P(X=0)}=$$

$$=\frac{1}{1-P(X=0)}\cdot E(X^2)=\frac{1}{1-e^{-1}}\cdot\left(V(X)+E^2(X)\right)=$$

$$=\frac{1+1^2}{1-e^{-1}}=\frac{2e}{e-1}$$

$$V(X|X\ge 1)=E(X^2|X\ge 1)-E^2(X|X\ge 1)=$$

$$=\frac{2e}{e-1}-\left(\frac{e}{e-1}\right)^2=\frac{2e(e-1)-e^2}{(e-1)^2}=\frac{e^2-2e}{(e-1)^2}$$

.3 $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$

$$E(X!)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)\cdot k!=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-0.5}\cdot 0.5^k}{k!}\cdot k!=$$

$$=e^{-0.5}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}0.5^k=2\cdot e^{-0.5}$$

.4 e^2

$$E(2^X)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2}\cdot\frac{2^k}{k!}\cdot 2^k=e^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-4}\cdot 4^k}{k!}=e^2$$

(בתוך ה Σ כתוב סכום ההסתברויות של משתנה $P(4)$.)

.5 $\quad e^5-e^3$

$$\operatorname{cov}(2^X,3^X)=E(2^X\cdot 3^X)-E(2^X)\cdot E(3^X)=$$

$$=E(6^X)-E(2^X)\cdot E(3^X)$$

$$E(3^X)=\sum e^{-1}\cdot\frac{1^k}{k!}\cdot 3^k=e^2\sum_{k=0}^{\infty}e^{-3}\cdot\frac{3^k}{k!}=e^2$$

$$E(2^X)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-1}\cdot\frac{1^k}{k!}\cdot 2^k=e\sum_{k=0}^{\infty}e^{-2}\cdot\frac{2^k}{k!}=e$$

$$E(6^X)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-1}\cdot\frac{1^k}{k!}\cdot 6^k=e^5$$

$$\operatorname{cov}(2^X,3^X)=e^5-e^2\cdot e=e^5-e^3$$

לכן

.6 $\quad \sqrt{\frac{e+1}{e^2+1}}$

$$r(2^X,3^X)=\frac{\operatorname{cov}(2^X,3^X)}{\sqrt{V(2^X)\cdot V(3^X)}}$$

$$V(2^X)=E\left((2^X)^2\right)-E^2(2^X)=E(4^X)-E^2(2^X)=$$
$$=e^3-e^2$$

$$V(3^X)=E(9^X)-E^2(3^X)=e^8-e^4$$

$$r(2^X,3^X)=\frac{e^5-e^3}{\sqrt{(e^3-e^2)(e^8-e^4)}}=\frac{e^3(e^2-1)}{e^3\sqrt{(e-1)(e^4-1)}}=$$ לכן

$$=\frac{e^2-1}{\sqrt{(e-1)(e^2-1)(e^2+1)}}=\sqrt{\frac{e+1}{e^2+1}}$$

7. $0.06 < p < 0.08$

X הוא סכום 10000 מ"מ פואסוניים ב"ת.
עכשיו להשתמש לגבי במשפט הגבול המרכזי.
התוחלת של הסכום היא 10000 וסטיית
התקן היא 100.
התשובה מקורבת היא $1-\phi\left(\frac{150}{100}\right)=1-\phi(1.5)$
$\cong 1-0.9332$

---

8. $2^{-40}\cdot\binom{23}{3}$

מרחב המדגם הוא בגודל $2^{40}=4^{20}$. יש 20 תוצאות
ויש למצוא מיקום ל 3 מחיצות שיפרידו מעברים
ממספר למספר העוקב לו. יש למצוא מיקומים
ל 3 מחיצות ב $20+3$ מקומות (דומה לבעיית
הכנסת כדורים לתאים).

9. $2^{-32}\cdot 33$

כאן למחיצה הראשונה יש 8 מיקומים אפשריים ויש
למקם שתי מחיצות ב 12 מיקומים נוספים.
לכן מספר האפשרויות הוא $8\cdot\binom{12}{2}$ אלה אפשרויות
מתוך $4^{20-2}=2^{36}$ אפשרויות כלליות כי לשני
משתנים יש כבר ערך קבוע.

10. $2^{-40}\binom{19}{3}$

כאן זה דומה למקרה שבכל תא יש כבר כדור
אחד לכן צריך למצוא 3 מקומות למחיצות
בין $16+3$ מקומות.

---

8 .3 .11

$$E((X-Y)^2) = E(X^2) - E(2XY) + E(Y^2) \overset{*}{=}$$
$$\overset{*}{=} 2E(X^2) - 2\cdot E(X)\cdot E(Y) = 2[E(X^2) - E^2(X)] = 2V(X) = 8$$

* מכיון ש X ו Y ב"ת אז הם בלתי מתואמים ומתקיים $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$.

10.5 .12

$$E((X-Y)^2) = 2\cdot E(X^2) - 2\cdot E(X)\cdot E(Y) = 2\cdot V(X) =$$
$$= 2\cdot \frac{(8-1+1)^2-1}{12} = 10.5$$

12 .13

$$E((X-Y)^2) = P(X=Y)\cdot 0 + P(X\neq Y)\cdot E((X-Y)^2 | X\neq Y)$$

מתקיים $P(X=Y) = \frac{1}{8}$

לכן $10.5 = \frac{7}{8}\cdot E((X-Y)^2 | X\neq Y)$

לכן $E((X-Y)^2 | X\neq Y) = 12$

84 .14

עבור כל $i\neq j$: $E((X_i-X_j)^2) = E((X-Y)^2 | X\neq Y) = 12$

תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות שהוא 84.

76 .15

$$E(X_7-X_8)^2 = \frac{1}{7}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2) = 20$$

$(X_1,X_2,\dots,X_7)$ זאת תמורה על $(1,2,\dots,7)$. כדי לחשב את התוחלת של כל מרכיב, נחזור על התהליך הקודם, תוחלת ההפרש של שני משתנים $U(1,7)$ שווה ל $2\cdot\frac{(7-1+1)^2-1}{12} = 8$. אם הם שווים אז ריבוע ההפרש הוא אפס: ולכן בהינתן שהם לא שווים אז הוא $\frac{7}{6}\cdot 8 = \frac{28}{3}$. סכום התוחלות של הריבועים שווה ל $6\cdot\frac{28}{3} + 20 = 76$

16. 84

עבור כל i $E((X_i-Y_i)^2)=E((X-Y)^2)$

כאשר X ו Y הם משתנים $U(1,8)$ ב"ת.

תוחלת הסכום שווה ל $8\cdot 10.5=84$.

---

17. גיאומטרית

אפשר ללא חישובים רבים

$$P(X/2=k \mid \text{זוגי } X) = \frac{P(X=2k)}{P(\text{זוגי } X)}$$

לכן היחס בין $P(X/2=k \mid \text{זוגי } X)$ לבין $P(X/2=k+1 \mid \text{זוגי } X)$ הוא יחס קבוע ומתקבלת התפלגות חסרת זכרון שהיא התפלגות גיאומטרית.

18. 1

בשני המקרים יש אותו יחס בין ההסתברות לקבלת ערך מסוים לבין ההסתברות לקבלת הערך העוקב. יחס זה קובע חד משמעית את הפרמטר של ההתפלגות הגיאומטרית. לכן התפלגות אחת היא רק הזזה בקבוע 1 של ההתפלגות הנכונה לאחרת.

19. 3

הסכום מתפלג בקירוב נורמלית עם תוחלת 90000 וסטיית תקן $\sqrt{9000\cdot\frac{0.9}{0.1^2}}=900$ לכן ההסתברות המבוקשת היא בקירוב:

$$\Phi\left(\frac{88200-90000}{900}\right)=\Phi(-2)=1-\Phi(2)$$

20 $a \le \frac{1}{18}$

$$p(X \ge Y+9) = p(X-Y \ge 9)$$

$$E(X-Y)=0$$

$$V(X-Y) \overset{\text{א' תלות}}{=} V(X)+V(Y) = 2\cdot 24\cdot \frac{1}{4}\cdot \frac{3}{4} = 9$$

לפי א' שוויון צ'בישב נקבל חסם $\frac{9}{9^2}$

משיקולי סימטריה ניתן לחלק אותו ב-2.

שלומי