סמסטר ב', מועד א', תשע"ד, 16.6.2014

בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: דר' רון פלד)

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות הברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 נקודות במבחן. אם צברת S נקודות, ציונך min(S,100).

ב ה צ ל ח ה ! ! !

חלק א' - שאלה פתוחה – 26 נקודות

למטילדה מטבע שבו ההסתברות לעץ בכל הטלה היא 1/3. מטילדה מטילה את המטבע n פעמים באופן בלתי תלוי. עבור $1 \le k \le n$ נסמן ב-N_k את כמות הפעמים בהם התקבל רצף של k עצים לאורך סדרת ההטלות.

דוגמא: אם n=5 ותוצאות סדרת ההטלות הן עץ, עץ, עץ, פלי, עץ אז מתקיים $N_1 = 4, N_2 = 2, N_3 = 1, N_4 = 0$ ו- $N_5 = 0$. נדגיש שרצפים חופפים עדיין נספרים כרצפים שונים ולכן $N_2 = 2$ בדוגמא.

א) (6 נק') הוכיחו כי לכל $1 \le k \le n$ מתקיים $E(N_k) = (n-k+1)3^{-k}$.

ב) (8 נק') הוכיחו כי לכל $1 \le k \le n$ מתקיים

$Var(N_k) = (n-k+1)3^{-k}(1-3^{-k}) + 2\sum_{m=1}^{k-1}(n-2k+m+1)3^{-2k}(3^m-1)$.

נסמן ב-M את אורך הרצף הארוך ביותר של עצים בסדרת ההטלות. בדוגמא למעלה מתקיים M=3.

ג) (6 נק') הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P(M > (1+\varepsilon)\log_3 n) = 0$.

ד) (6 נק') הוכיחו כי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} P(M > (1-\varepsilon)\log_3 n) = 1$.

חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 84 נקודות)

סוגיה ראשונה

יהי $n \ge 10$. מסדרים את המספרים מ-1 עד n בשורה בסדר מקרי הנבחר באופן אחיד מכל הסדרים האפשריים. עבור $1 \le i \le n$ יהי X_i המספר היושב במקום ה-i כאשר קוראים את המספרים בשורה משמאל לימין. עבור $2 \le i \le n$ יהי A_i המאורע ש-X_i גדול יותר מכל אחד מ-$X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}$.

1) נסמן ב-B את המאורע שבחמשת המקומות הראשונים בסדרה נמצאים המספרים 1,3,4,6,7, לאו דווקא בסדר זה (למשל, המאורע מתקיים כאשר $X_1=3, X_2=6, X_3=7, X_4=4, X_5=1$).
מהי $E(X_2 \mid B)$?
א) 3
ב) 21/5
ג) (n+1)/2
ד) אף אחת מהנ"ל

2) מהי ההסתברות של A_i?
א) 1/i!
ב) n! / (i-1)!(n-i+1)!
ג) 1/i
ד) אף אחת מהנ"ל

3) המאורעות A_2,A_3 ו-A_7 הם:
א) בלתי-תלויים
ב) תלויים אך בלתי-תלויים בזוגות
ג) A_2 ו-A_3 בלתי תלויים אך A_3 ו-A_7 תלויים
ד) אף אחת מהנ"ל

4) נסמן ב-S_n את כמות המאורעות A_i שהתרחשו.
מה נכון לגבי ההסתברות $P(S_n \geq \sqrt{n})$ כאשר n שואף לאינסוף?
א) מתכנסת ל 1
ב) מתכנסת ל $1-\varphi(1)$
ג) מתכנסת ל $1/e$
ד) אף אחת מהנ"ל

סוגיה שנייה

ביישום הטלפון "ממתקים כועסים" ישנם 10 שלבים הממוספרים 0,1,...,9. בכל תור השחקן מתמודד באחד השלבים, במידה וניצח הוא עולה לשלב הבא ובמידה והפסיד הוא עובר לשלב 0. אם ניצח השחקן בשלב 9 הוא נשאר בשלב 9 ואם הפסיד בשלב 0 הוא נשאר בשלב 0.
ציפורה מכורה ליישום זה ומשחקת בו ברצף כל יום. ציפורה שחקנית טובה ועל כן מנצחת בכל שלב בסיכוי 2/3 ומפסידה בסיכוי 1/3, באופן ב"ת בין התורות אותם היא משחקת.
בשאלה זו נתייחס למשחקה של ציפורה ביום א', אותו היא מתחילה בשלב 1, כאל שרשרת מרקוב על המצבים 0,1,...,9.

5) מה הסיכוי שציפורה תהיה בשלב 0 לפחות פעמיים לפני שתהיה בשלב 3?
א) 25/81
ב) 361/729
ג) 95/243
ד) אף אחת מהנ"ל

6) מהו המחזור של מצב 5?
א) 1
ב) 6
ג) 10
ד) אף אחת מהנ"ל

7) באותו יום א' הוחלט ע"י מפתחי היישום שבכל תור בו ציפורה משחקת בשלב 9 היא תצבור עשר נקודות זכות ובכל תור בו היא משחקת בשלב 0 היא תפסיד נקודת זכות. נסמן ב- S_t את כמות נקודות הזכות של ציפורה לאחר ששיחקה t תורות.
מה נכון לגבי הכמות $\frac{E(S_t)}{t}$ כאשר t שואף לאינסוף?
א) מתכנסת למספר חיובי
ב) מתכנסת לאפס
ג) מתכנסת למספר שלילי
ד) אינה מתכנסת

סוגיה שלישית

יהי $n\geq 2$ ויהיו $X_1, \ldots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות המקיימים $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$.
נגדיר $S := X_1+\ldots+X_n$ ו- $Q := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} X_iX_j$.

8) התוחלת של Q היא
- א) 0
- ב) 1
- ג) n
- ד) אף אחת מהנ"ל

9) השונות של Q היא
- א) n-1
- ב) n(n-1)/2
- ג) 2Var(S)-3
- ד) אף אחת מהנ"ל

10) מקדם המתאם בין S לבין Q הוא
- א) 1
- ב) קטן מ-1 אך גדול מ-0
- ג) 0
- ד) אף אחת מהנ"ל

11) מקדם המתאם בין S^2 לבין Q הוא
- א) 1
- ב) קטן מ-1 אך גדול מ-0
- ג) 0
- ד) אף אחת מהנ"ל

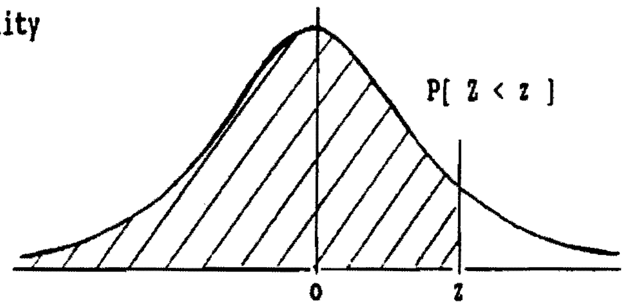
12) כאשר n שואף לאינסוף, ההסתברות $P(Q\geq 0)$
- א) מתכנסת ל-1/2
- ב) מתכנסת ל-$2\Phi(-1)$
- ג) אינה מתכנסת
- ד) אף אחת מהנ"ל

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P[\ Z < z\ ] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}Z^2)\ dZ$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000