פתרון מקוצר לבחינה של פרופ' רון פלד מ 14/06/16

חלק א

סעיף א

בגלל שהמשתנים הם ב"ת אז תוחלת המכפלה שווה למכפלת התוחלות.

$$E(Z_n) = E^n(X_1) = \left(\frac{3}{5}\cdot 0.5 + \frac{2}{5}\cdot 2\right)^n = 1.1^n$$

$$V(Z_n) = E\left(Z_n{}^2\right) - E^2(Z_n) = \left(\frac{3}{5}\cdot 0.5^2 + \frac{2}{5}\cdot 2^2\right)^n - 1.1^{2n} = 1.75^n - 1.21^n$$

סעיף ב

$\log_2 Z_n$ הוא סכום של n משתנים מקריים בלתי תלויים שלכל אחד מהם יש התפלגות כמו של $\log_2 X_1$. מכאן התוחלת שלו שווה ל n פעמים התוחלת של $\log_2 X_1$, והשונות שלו שווה ל n פעמים השונות של $\log_2 X_1$. לגבי השונות נראה גם גישה נוספת.

$$E(\log_2 Z_n) = nE(\log_2 X_1) = n\left(\frac{3}{5}\cdot(-1) + \frac{2}{5}\cdot 1\right) = -\frac{n}{5}$$

$$V(\log_2 Z_n) = E\left(\log_2{}^2(Z_n)\right) - E^2(\log_2 Z_n)$$

$$E\left(\log_2{}^2(Z_n)\right) = E\left(\log_2(X_1X_2\cdots X_n)\log_2(X_1X_2\cdots X_n)\right) =$$
$$= nE\left(\log_2{}^2(X_1)\right) + n(n-1)E\left(\log_2(X_1)\log_2(X_2)\right)$$

מתקיים $E\left(\log_2{}^2(X_1)\right) = 1$.

מתקיים $E\left(\log_2(X_1)\log_2(X_2)\right) = \left[\frac{3}{5}\cdot(-1)^2 + \frac{2}{5}1^2\right]^2 = \frac{1}{25}$.

נקבל $V(\log_2 Z_n) = \frac{24}{25}n$.

סעיף ג

$$P(Z_n < \varepsilon) = 1 - P(Z_n \ge \varepsilon) = 1 - P(\log_2 Z_n \ge \log_2 \varepsilon) \ge 1 - \frac{V(\log_2 Z_n)}{\left(\log_2 \varepsilon + \frac{n}{5}\right)^2}$$

וגודל זה שואף ל 1 כאשר $n \to \infty$.

(המעבר האחרון הוא לפי אי שיוויון צ'בישב).

סעיף ד

מתקיים $P\left(Z_{50} \ge \frac{1}{64}\right) = P(\log_2(Z_{50}) \ge -6)$

$\log_2 Z_n$ הוא סכום של n משתנים ב"ת המתפלגים כמו $\log_2(X_1)$.

מתקיים $E(\log_2(X_1)) = -\frac{1}{5}$, $V(\log_2(X_1)) = \frac{24}{25}$.

לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים

$$P\left(\log_2\left(Z_{50}\right)\geq -6\right)\cong 1-\phi\left(\frac{\frac{-6}{50}-\frac{-1}{5}}{\sqrt{\frac{24/25}{50}}}\right)\cong 1-\phi\left(0.577\right)\cong 0.28$$

חלק ב

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ד	א	ג	א	ג	ב	ג	ב	ד	ד	ג	א

הסברים קצרים

שאלה 1

כל אחת מהקוביות היא הקוביה של ברנרד בסיכוי $\frac{1}{4}$. כל אחת מהתוצאות מתקבלת בסיכוי $\frac{1}{12}$ (בסיכוי $\frac{1}{6}$ בשתי קוביות).

שאלה 2

כל קוביה מוטלת בדיוק פעם אחת. ההטלות של הקוביות השונות הן ב"ת. לכן שונות הסכום שווה לסכום השונויות.

השונות של הראשונה היא $\frac{(6-1+1)^2-1}{12}$. השונות של השניה היא $\frac{(12-7+1)^2-1}{12}$.

לכל אחת מבין השלישית והרביעית יש שונות של $2^2=4$ השונות של הראשונה (מתקיים תמיד $V(aX+b)=a^2V(X)$).

שאלה 3

כל תוצאה שדונלד קיבל, מתקבלת גם על-ידי ברנרד על-ידי קבלת צירוף מסוים יחיד של קוביה ופאה. לכן הסיכוי הוא $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$ עבור כל תוצאה שקיבל דונלד וגם בכלל.

שאלה 4

בדומה לשאלה 3, מתקיים $P(X=Z)=\frac{1}{18}$. אם אין שיוויון, אז משיקולי סימטריה כל אחד גדול מהאחר בסיכוי חצי. לכן התשובה היא $\frac{1-\frac{1}{18}}{2}$.

שאלה 5

מטריצת המעבר של L_t היא

$$\begin{pmatrix} 0.5+0.5\cdot 0.5^3 & 0.5\binom{3}{1}0.5^3 & 0.5\binom{3}{2}0.5^3 & 0.5\cdot 0.5^3 \\ 0.5\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5+0.5\cdot 0.5^2 & 0.5\cdot\binom{2}{1}0.5^2 & 0.5\cdot 0.5 \\ 0.5\cdot 0.5^2 & 0.5\binom{2}{1}0.5^2 & 0.5\cdot 05^2+0.5\cdot 0.5 & 0.5\cdot 0.5 \\ 0.5\cdot 0.5^3 & 0.5\binom{3}{1}0.5^3 & 0.5\binom{3}{2}0.5^3 & 0.5+0.5\cdot 0.5^3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

כדי למצוא את ההסתברויות המעבר בזמן 2, אפשר להעלות את המטריצה ברבוע.
ההסתברות המבוקשת היא סכום האיברים השני והרביעי בשורה השניה של המטריצה המתקבלת.

שאלה 6

מטריצת המעבר היא דו סטוכסטית לכן יש וקטור סטציונרי שכל רכיביו שווים.
השרשרת היא בלתי פריקה לכן יש רק וקטור סטציונרי יחיד.
הווקטור הסטציונרי מייצג את השכיחויות. בגלל האי מחזוריות יש גם הסתברויות גבולויות ששוות לסטציונריות.

ממוצע הרווח של יוספה לסיבוב ישאף ל $\frac{1}{4}(0+1+2+3)\cdot 5-7$.

שאלה 7

$$\lim_{t\to\infty} E(L_t R_t) = \frac{1}{4}(0.3+1\cdot 2+2\cdot 1+\cdot 3\cdot 0)$$

שאלה 8

עבור כל n קבוע בכל שורה, הסיכוי ש 0 לא יופיע הוא 0.5^n. חלים התנאים הנדרשים לקירוב פואסוני להתפלגות בינומית. המשתנה המקרב הוא בעל פרמטר $2^n\cdot 0.5^n=1$.
ההסתברות היא בקירוב ההסתברות שמשתנה זה יקבל את הערך 3.

<u>שאלה 9</u>

נבחר שרירותית משבצת אחת. עבור כל סכום של האחרות, המשבצת הזאת משלימה לסכום זוגי בסיכוי חצי.

<u>שאלה 10</u>

יש 2^n צרופים שונים אפשריים בשורה. המאורע המשלים למאורע המבוקש הוא שכל צירוף יתקבל בדיוק פעם אחת. כך, לאחר קבלת הצירופים בכל השורות להוציא האחרונה, באחרונה חייב להתקבל צירוף מסוים. כאשר $n \to \infty$ מתקבל צירוף מסוים בהסתברות ששואפת לאפס.

<u>הערה</u>

אפשר גם להשתמש באי שיוויון צ'בישב כדי לקבל חסם עליון על ההסתברות לסטיה.

<u>שאלה 11</u>

$P(B) = 0.5^n$. מכיון שלכל שורה יש סיכוי שווה להיות היחידה שמקיימת את התכונה אז $P(B \mid A) = 0.5^n$.

<u>שאלה 12</u>

נניח שיש שרשרת בעלת שני מצבים $\{0,1\}$, מטריצת מעבר $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ והתפלגות התחלתית שבה יש סיכוי שווה לכל מצב. בכל שלב נמצאים בכל אחד מהמצבים בסיכוי שווה.

שלומי