

סמסטר א', מועד א', תשע"ו, 14.6.2016

בחינה ב"מבוא להסתברות" (מרצה: פרופ' רון פלד)

משך הבחינה שדוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות ברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 נקודות במבחן. אם צברת S נקודות, ציוןך $\min(S, 100)$.

בהצלחה!!!

חלק א' – שאלה פתוחה – 26 נקודות

יהיו $X_1, X_2, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות המקיימים

$P(X_i = 2) = \frac{2}{5}$ וגם $P(X_i = \frac{1}{2}) = \frac{3}{5}$. נגדיר משתנה מקרי $Z_n = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \dots \cdot X_n$ (כלומר, Z_n הוא מכפלת כל ה- X_i).

(א) (6 נק') חשבו את $E(Z_n)$ ואת $Var(Z_n)$.

(ב) (6 נק') חשבו את $E(\log_2(Z_n))$ ואת $Var(\log_2(Z_n))$.

(ג) (7 נק') הסיקו שלכל $\epsilon > 0$ מתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < \epsilon) = 1$.

(ד) (7 נק') השתמשו במשפט הגבול המרכזי כדי לחשב הערכה עבור ההסתברות

$$P\left(Z_{50} \geq \frac{1}{64}\right)$$

חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 84 נקודות)

סוגיה ראשונה

על השולחן מונחות ארבע קוביות הוגנות (כלומר, לכל פאה סיכוי שווה בהטלה):

- על פאות הקוביה הראשונה המספרים $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- על פאות הקוביה השנייה המספרים $\{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
- על פאות הקוביה השלישית המספרים $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.
- על פאות הקוביה הרביעית המספרים $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

ברנרד, ג'ון, דונלד והילרי משחקים בקוביות. ראשונה מגיעה הילרי, בוחרת קוביה באופן אחיד מבין ארבע הקוביות ומטילה אותה. נסמן את תוצאת ההטלה ב- X . שני מגיע דונלד, בוחר קוביה באופן אחיד מבין שלוש הקוביות הנותרות ומטיל אותה. נסמן את תוצאת ההטלה ב- Y . שלישי מגיע ג'ון, בוחר קוביה באופן אחיד מבין זוג הקוביות שנותר ומטיל אותה. נסמן את תוצאת ההטלה ב- Z . לבסוף ברנרד מטיל את הקוביה האחרונה שנותרה. נסמן את תוצאת ההטלה ב- W .

(1) ההתפלגות של W היא

- (א) אחידה
- (ב) בינומית
- (ג) היפרגיאומטרית
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

(2) מהי $Var(X + Y + Z + W)$?

(א) $\frac{140}{12}$

(ב) $\frac{210}{12}$

(ג) $\frac{350}{12}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה

(3) מהי $P(Y = W)$?

(א) $\frac{1}{4}$

(ב) $\frac{1}{3}$

(ג) $\frac{1}{2}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה

(4) מהי $P(X > Z)$?

(א) $\frac{1}{4}$

(ב) $\frac{1}{3}$

(ג) $\frac{1}{2}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה

סוגיה שניה

ישנם שני כדים על השולחן, בשמאלי מטבע אחד ובימני שני מטבעות. כל המטבעות הוגנים. יוסף ויוספה משחקים את המשחק הבא:

- כל סיבוב מתחיל בכך שיוספה משלמת ליוסף שבעה שקלים.
 - לאחר מכן יוסף בוחר את אחד משני הכדים בסיכוי שווה, ומטיל את המטבעות שבו (באופן בלתי תלוי). יוסף משאיר בכד שנבחר את כל המטבעות שנפלו על עץ ומעביר לכד השני את כל המטבעות שנפלו על פלי.
 - בסוף הסיבוב משלם יוסף ליוספה כמות שקלים השווה לפי חמש מכמות המטבעות בכד השמאלי.
 - הסיבוב הבא מתחיל במצב הנוכחי של הכדים (משאירים את המטבעות בכד אליו הגיעו בסוף הסיבוב הנוכחי).
- נסמן ב- L_t את כמות המטבעות בכד השמאלי לאחר בדיוק t סיבובים (כך ש- $L_0 = 1$). באותו אופן נסמן ב- R_t את כמות המטבעות בכד הימני לאחר בדיוק t סיבובים. נסמן ב- S_t את הרווח של יוספה לאחר בדיוק t סיבובים (רווח שלילי אם יוספה שילמה יותר ממה שקיבלה).

(5) מהי ההסתברות ש- L_2 אי זוגי?

(א) $\frac{14}{32}$

(ב) $\frac{15}{32}$

(ג) $\frac{16}{32}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה

(6) כאשר t שואף לאינסוף, ממוצע הרווח $E(S_t)$ של יוספה:

(א) מתכנס למינוס אינסוף

(ב) מתכנס לאפס

(ג) מתכנס לאינסוף

(ד) אף תשובה אינה נכונה

(7) מה אפשר לומר על $\lim_{t \rightarrow \infty} E(L_t \cdot R_t)$?

- (א) הגבול קיים וקטן מ-1
- (ב) הגבול קיים ושווה ל-1
- (ג) הגבול קיים וגדול מ-1
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

סוגיה שרישית

יהי $n \geq 1$ שלם. איילת מכינה טבלה מקרית בעלת 2^n שורות ו- n עמודות (כלומר, בכל אחת מ- 2^n השורות יש n תאים). איילת מטילה מטבע הוגן עבור כל תא בטבלה באופן בלתי תלוי ורושמת בתא את תוצאת ההטלה (כלומר, עץ או פלי בהתאם להטלת המטבע).

(8) כאשר n שואף לאינסוף, ההסתברות שיש בדיוק שלוש שורות בטבלה בהן הערך פלי אינו מופיע:

- (א) מתכנסת ל-0
- (ב) מתכנסת לערך השווה בקירוב ל-0.01
- (ג) מתכנסת לערך השווה בקירוב ל-0.06
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

(9) ההסתברות שכמות העצים בטבלה זוגית:

- (א) שווה בדיוק לחצי לכל ערך של n
- (ב) שווה בדיוק לחצי כאשר n אי-זוגי וגדולה ממש מחצי כאשר n זוגי
- (ג) קטנה ממש מחצי עבור אינסוף ערכים של n
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

(10) כאשר n שואף לאינסוף, ההסתברות שיש בטבלה שתי שורות עם ערכים זהים (כלומר, שתי שורות בהן סדרת הטלות המטבע הייתה זהה לחלוטין):

- (א) מתכנסת ל-0
- (ב) מתכנסת לערך השווה בקירוב ל-0.37
- (ג) מתכנסת ל-1
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

(11) נסמן ב- A את המאורע שיש בדיוק שורה אחת בה הערך פלי אינו מופיע.

נסמן ב- B את המאורע שבשורה הראשונה הערך פלי אינו מופיע.

מה נכון לגבי משתני האינדיקטור 1_A ו- 1_B :

- (א) המשתנים בלתי תלויים לכל n
- (ב) השונות המשותפת של המשתנים חיובית ממש לאינסוף ערכים של n
- (ג) מקדם המתאם בין המשתנים מתכנס למינוס 1 כאשר n שואף לאינסוף
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

שאלה שאינה חלק מסוגיה

(12) נתונה שרשרת מרקוב (X_t) בעלת מרחב מצבים סופי S , אי-פריקה ובעלת התפלגות התחלתית μ . נתון ש- x הוא מצב בשרשרת בעל מחזור 2.

כאשר t שואף לאינסוף, ההסתברות $P_\mu(X_t = x)$:

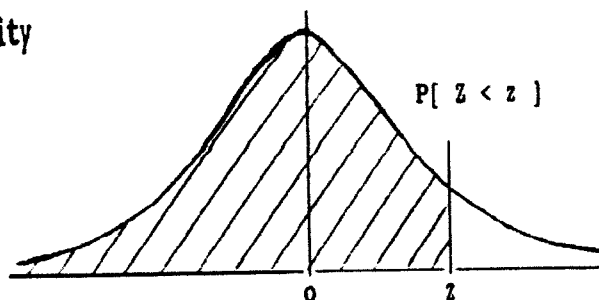
- (א) בהכרח אינה מתכנסת
- (ב) בהכרח מתכנסת ל-0
- (ג) מתכנסת אם ורק אם מספר המצבים ב- S אי-זוגי
- (ד) אף תשובה אינה נכונה

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability
up to the standardised normal value z
i.e.

$$P[Z < z] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000