פתרון הבחינה של פרופ' סולן ופרופ' זיילסון מ 13/2/07

1. $\frac{1}{N}$. לכל מספר יש אותו סיכוי.

2. $$1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^2 \overset{\text{גם}}{=} \frac{1}{N}+\frac{1}{N}-\left(\frac{1}{N}\right)^2$$

3. $$M\cdot\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)+\frac{M}{2}\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^2$$

4. אותם סיכויים לנחש נכון, אבל אם הוא מנחש נכון אז הוא לא צריך להתחלק בפרס. לכן תוחלת הרווח גדולה יותר.

5. בהינתן A, $X-1$ הוא מספר המנחשים נכון מבין $n-1$ אנשים שניחושיהם אינם תלויים. לכן ההתפלגות המותנה של $X-1$ היא $B\left(n-1,\frac{1}{N}\right)$.

6. $$\frac{N-1}{N}\cdot 0+\frac{1}{N}M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\binom{n-1}{k}\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1-k}$$
$$=\frac{M}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^{k+1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1-k}=$$

איבר אחד חסר מפיתוח בינום

$$\Longrightarrow \frac{M}{n}\left(1-\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^0\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)=\frac{M}{n}\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right)$$

---

7. $$P(\text{מעונן})\cdot\frac{1}{4}+\left(1-P(\text{מעונן})\right)\cdot P\left(\substack{\text{מים כן}\\ \text{לא מעונן}}\right)=\frac{1}{3}$$

ואין מספיק נתונים

8. $$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{5}{6}\cdot p=\frac{1}{3}\Longrightarrow p=\frac{9}{25}$$

9. $$\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{10}$$

10. יתכן למשל שאף פעם הם לא מעוננים וכאשר הם לא מעוננים אז יוצאים מ"מ בסיכוי $\frac{1}{3}$.

יתכן למשל שמחצית הימים הם מעוננים וכאשר הם לא מעוננים יוצאים מים בסיכוי $\frac{5}{12}$. במקרה כזה אם יוצאו מים אז ההסתברות המותנה שהיה מעונן היא $\frac{0.5\cdot\frac{1}{4}}{0.5\cdot\frac{1}{4}+0.5\cdot\frac{5}{12}}>\frac{1}{10}$

11. ימים שונים הם בלתי תלויים.

$$\sqrt{V(X)}=\sqrt{364\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}\cong 9 \qquad E(X)=\frac{364}{3}\cong 121.33$$

$$\Phi\left(\frac{140.5-E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)-\Phi\left(\frac{109.5-E(X)}{\sqrt{V(X)}}\right)=\Phi(2.13)-\Phi(-1.31)=$$

$$=\Phi(2.13)+1-\Phi(1.31)\cong 0.983-1+0.907$$

---

12. $P(M)=\frac{3}{4}$

$$P(C_1)=\frac{1}{4}\cdot 1+2\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

13. לאם יש סיכוי שווה להיות אחת מהאפשרויות: (DD), (DL), (LD). הוא צריך לקבל מהאם D ולכן יש סיכוי $\frac{2}{3}$.

14. $\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

15. לכל אחד מהאפשרויות יש סיכוי שווה (DD), (DL) או (LD).

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{9}$$

16. $$\frac{P(M\cap F\cap C_1)}{P(C_1)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

הנחתי כמו ההורים שהם כל אחד בסיכוי $\frac{1}{4}$ (DD) ובסיכוי $\frac{1}{2}$ (DL). הם חייבים להיות (DD) או (DL) כדי שילדיהם יהיו בריאות.

$$P(N=1 \mid N<3) = \frac{p}{p+q\cdot p} = \frac{1}{1+q} = \frac{1}{2-p}$$ 17.

$$P(N=2 \mid N<3) = \frac{q\cdot p}{p+q\cdot p} = \frac{q}{1+q} = \frac{1-p}{2-p}$$

$$E(X \mid N=1) = \frac{1000+2000}{2} = 1500$$

$$E(X \mid N=2) = \left(\frac{1000+2000}{2} + \frac{1000+3000}{2}\right)/2 = 1750$$

$$E(X \mid N<3) = \frac{1}{2-p}\cdot 1500 + \frac{1-p}{2-p}\cdot 1750 = 1750 - \frac{250}{2-p}$$

18. המעלה ה-k בעלת תוחלת $1000+500k$
תוחלת הממוצע של k הראשונות היא:

$$1000 + \frac{1+k}{2}\cdot 500 = 1250 + 250k$$

$$E(X) = \sum p\cdot q^{k-1}(1250+250k) =$$

$$= 1250 \sum p\cdot q^{k-1} + 250 \sum_{k=1}^{\infty} p\cdot q^{k-1}\cdot k \overset{*}{=} 1250 + \frac{250}{p}$$

(הסכום הבא הוא תוחלת של משתנה גיאומטרי)

א' וב' לא אפשריות כי הממוצע עולה כאשר p יורד והממוצע אף פעם לא יכול להיות שלילי.

ג' לא יתכן כי כאשר $p \to 0$ אז הממוצע שואף ל ∞.

19. בהינתן $(N>3)$; עבור $k\geq 3$: $P(X=k) = p\cdot q^{k-3}$

$$E(X \mid N\geq 3) = \sum_{k=3}^{\infty} p\cdot q^{k-3}(1250+250k) =$$

$$= 1250 + 250 \sum_{k=1}^{\infty} p\cdot q^{k-1}(k+2) = 1750 + \frac{250}{p}$$

$E(N) = \frac{1}{p}$ $\quad E(X) = 1250 + 250/p$ .20

$$E(X\cdot N) = \sum p\cdot q^{k-1}\cdot k(1250+250k) =$$

$$= 1250 \sum p \cdot q^{k-1} \cdot k + 250 \sum p \cdot q^{k-1} \cdot k^2 =$$

$$= 1250 \cdot E(N) + 250 \cdot \left(V(N) + E^2(N)\right) =$$

$$= \frac{1250}{p} + \frac{250 \cdot q}{p^2} + 250 \cdot \frac{1}{p^2}$$

$$cov(X, N) = E(X \cdot N) - E(X) \cdot E(N) =$$

$$= \frac{1250}{p} + \frac{250q}{p^2} + \frac{250}{p^2} - \frac{1250}{p} - \frac{250}{p^2} = 250 \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

סוף