סמסטר א', מועד א', תשנ"ט
תאריך הבחינה: 09.03.1999
מספר קורס: 0365-1102

מספר התלמיד________________________________

בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3.5 שעות.
מותר (אבל לא הכרחי) להשתמש במחשבון.
השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 5 סוגיות. ענה על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:

	×				×		×
		×				×	×
			×		×		×
				×		×	×
0	-2	6	-2	-2	-4	4	0

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות וטבלת ההתפלגות הנורמלית.

בהצלחה!

	1	2	3
א			
ב			
ג			
ד			

	4	5	6	7	8
א					
ב					
ג					
ד					

	9	10	11	12
א				
ב				
ג				
ד				

	13	14	15	16	17
א					
ב					
ג					
ד					

	18	19	20
א			
ב			
ג			
ד			

סוגיה 1

מבצעים סידרה של $10\,000$ הטלות מטבע הוגן $\left(\text{הסתברויות } \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. יהי X מספר ההצלחות.

---

1. בשימוש באי-שוויון צ'בישב, ה- k המינימלי כך ש- $\mathbb{P}\left(|X-5\,000| \geq k\right) \leq \frac{1}{9}$ הוא:

(א) 300 (ב) 150 (ג) 75

2. בשימוש בקירוב נורמלי, ה- k המינימלי כך ש- $\mathbb{P}\left(|X-5\,000| \geq k\right) \leq \frac{1}{9}$ הוא:

(א) 180 (ב) 18 (ג) 80

3. עבור הערך של k שהתקבל בשאלה 1, לפי קירוב נורמלי, ההסתברות $\mathbb{P}\left(|X-5\,000| \geq k\right)$ היא:

(א) 0.056 (ב) 0.212 (ג) 0.0009

סוגיה 2

ידוע שתוחלת הגובה של גבר (ס"מ) $\mathbb{E}\left(X\right) = 175$, ו- $\sigma_X = 10$. Y המשקל (ק"ג), $\mathbb{E}\left(Y\right) = 75$, $\sigma_Y = 5$. מקדם המתאם $\rho_{X,Y} = 0.6$.

---

4. בהנתן שגובהו של גבר הוא 180, משקלו בהתאם לקירוב הלינארי האופטימלי הוא:

(א) 80 (ב) 78 (ג) 77.5

5. יהי Y_1 הקירוב הלינארי האופטימלי. תוחלת ריבוע שגיאת הקירוב $\mathbb{E}\left((Y_1-Y)^2\right)$ היא:

(א) 16 (ב) 15 (ג) 26

6. נשתמש בקירוב (מסורתי, לא אופטימלי) $Y_2 = X - 100$. תוחלת ריבוע שגיאת הקירוב המסורתי $\mathbb{E}\left((Y_2-Y)^2\right)$ היא:

(א) 65 (ב) 16 (ג) 25

7. השונות המשותפת של הקירוב הלינארי האופטימלי והקירוב המסורתי, $\operatorname{Cov}\left(Y_1, Y_2\right)$, היא:

(א) -10 (ב) 0 (ג) 30

8. בהנתן $X = a$, יהי Y_1 שווה ל- b. בהנתן $Y = b$, יהי $X_1 = a'$.

(א) $a' = a$ לכל a.

(ב) $|a'-175| < |a-175|$ לכל $a \neq 175$.

(ג) $a' < a$ לכל $a \neq 175$.

סוגיה 3

חרק מטיל k ביצים ($k=1,2,\dots$) בהסתברות $p(1-p)^{k-1}$ כאשר $p=0.1$ (התפלגות גאומטרית שמתחילה ב־ 1). כל ביצה בוקעת בהסתברות $\frac{1}{2}$ ובאופן בלתי תלוי בביצים האחרות. יהי Y מספר הביצים שבוקעות.

---

9. בהנתן שמספר הביצים שהוטלו שווה ל־ 7 , ההתפלגות המותנה של Y היא:

(א) בינומית (ב) גיאומטרית (ג) פואסון

....

10. התוחלת $\mathbb{E}\left(Y\right)$ היא:

(א) 10 (ב) 5.5 (ג) 4.5

....

11. השונות $\mathbb{V}\left(Y\right)$ היא:

(א) 22.5 (ב) 25 (ג) 2.5

....

12. ההסתברות $\mathbb{P}\left(Y=0\right)$ היא:

(א) $\frac{18}{121}$ (ב) $\frac{9}{110}$ (ג) $\frac{9}{11}$

סוגיה 4

בוחרים באופן מקרי סידרת ספרות $X_1,X_2,\dots$ כלומר מ"מ X_i בלתי תלויים שווי התפלגות, $\mathbb{P}\left(X_i=k\right)=\frac{1}{10}$ לכל $k=0,\dots,9$.

---

13. נסמן ב־ A את המאורע שקיבלנו 10 פעמים (בדיוק) סיפרה 0 ב־ 100 נסיונות. נסמן ב־ B את המאורע שהספרה 0 מתקבל בפעם ה־ 10 בנסיון ה־ 100 (בדיוק).

(א) $\mathbb{P}\left(B\right)=\binom{100}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{90}$.

(ב) $\mathbb{P}\left(B\,\middle|\,A\right)=\frac{1}{10}$.

(ג) $\mathbb{P}\left(B\,\middle|\,A\right)=\frac{1}{100}$.

....

14. מבצעים את הנסיונות. מתבוננים בפעם הראשונה שיצא 0 , לאחר מכן מחכים עד לקבלת 1 , לאחר מכן עד קבלת 2 וכך הלאה עד 9 . נסמן ב־ C את המאורע שסידרת הנסיונות הזאת תסתיים בפעם ה־ 100 (בדיוק).

(א) $\mathbb{P}\left(C\,\middle|\,A\right)=0$.

(ב) $\mathbb{P}\left(C\right)<\mathbb{P}\left(B\right)$.

(ג) $\mathbb{P}\left(C\right)=\mathbb{P}\left(B\right)$.

....

15. מבצעים את בחירת הספרות 100 פעמים. תהי $\omega = (X_1, \ldots, X_{100})$ סידרה של 100 ספרות. נתבונן בתת סדרות של ω באורך 10. תת סידרה $(X_{n_1}, \ldots, X_{n_{10}})$ נקראת עולה אם $X_{n_1} = 0, X_{n_2} = 1, \ldots, X_{n_{10}} = 9$. נציין ב– $Y(\omega)$ את מספר תת הסדרות העולות. מצא תוחלת $\mathbb{E}\big(Y\big)$.

(א) $\mathbb{E}\big(Y\big) = \dfrac{100!}{10!\,90!\,10^{10}}$.

(ב) $\mathbb{E}\big(Y\big) < 1$.

(ג) $\mathbb{E}\big(Y\big) = \dfrac{100!}{90!\,10^{10}}$.

. . . .

16. כמו בשאלה 3, נקרא לתת סידרה $(X_1, \ldots, X_{10})$ באורך 10 סידרת "אפס" אם $X_1 = 0, \ldots, X_{10} = 0$, כלומר כל האיברים הם 0 בתת סידרה. יהי $Z(\omega)$ מספר סדרות ה"אפס".

(א) $\mathbb{E}\big(Z\big) < 1$.

(ב) $\mathbb{E}\big(Z\big) = \mathbb{E}\big(Y\big)$.

(ג) $\mathbb{E}\big(Z\big) = \dfrac{100!}{90!\,10^{10}}$.

. . . .

17. השווה את השונויות של Y ו– Z.

(א) $\mathbb{V}\big(Z\big) > \mathbb{V}\big(Y\big)$.

(ב) $\frac{1}{2}\mathbb{V}\big(Y\big) < \mathbb{V}\big(Z\big) < \mathbb{V}\big(Y\big)$.

(ג) $\mathbb{V}\big(Z\big) = \mathbb{V}\big(Y\big)$.

סוגיה 5

נתונים $n+1$ כדים ($n > 3$). כל אחד מכיל n כדורים, בכד מספר i ($i = 0, \ldots, n$) יש i לבנים ו– $(n-i)$ שחורים. בוחרים באקראי (בהתפלגות אחידה) את אחד הכדים ומושכים ללא החזרה כדורים מהכד שנבחר.

18. בהנתן שבמשיכה ראשונה יצא לבן, ההסתברות שנבחר כד ה– i היא:

(א) $\dfrac{i}{n(n+1)}$ (ב) $\dfrac{i}{n}$ (ג) $\dfrac{2i}{n(n+1)}$

. . . .

רמז עבור שאלות 19, 20: שים לב לטבלת הנוסחאות בסוף.

19. בהנתן שבמשיכה הראשונה יצא לבן, ההסתברות שבמשיכה השניה גם כן יצא לבן, היא:

(א) $\dfrac{3}{4}$ (ב) $\dfrac{2}{3}$ (ג) $\dfrac{2(n-1)}{3(n+1)}$

. . . .

20. בהנתן שבשתי המשיכות הראשונות יצא לבן, ההסתברות שבמשיכה השלישית גם כן לבן, היא:

(א) $\dfrac{3}{4}$ (ב) $\dfrac{4(n-1)}{5(n+1)}$ (ג) $\dfrac{2}{3}$

רשימת נוסחאות

$\mathbb{V}(X)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{P}(X=k)$		ההתפלגות
$np(1-p)$	np	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$B(n,p)$	בינומית
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1-p}{p}$	$p(1-p)^k$	$G(p)$	גיאומטרית המתחילה ב–0
$n\frac{1-p}{p^2}$	$n\frac{1-p}{p}$	$\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k$	$NB(n,p)$	בינומית–שלילית המתחילה ב–0
$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n\frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n;R,W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots \quad (-1<x<1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X))$$

$$\mathbb{V}(Y)=\mathbb{E}(\mathbb{V}(Y \mid X))+\mathbb{V}(\mathbb{E}(Y \mid X))$$

$$\hat{Y}\approx\rho\hat{X}$$