מספר התלמיד________________________

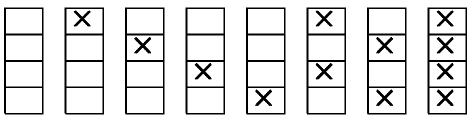
סמסטר ב׳, מועד א׳, תש״ס
תאריך הבחינה: 07.07.2000
מספר קורס: 0365-1102

בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ׳ בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
השאלון מורכב מ-21 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. רצוי לענות על כולן.
לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

דוגמה:



0 -2 6 -2 -2 -4 4 0

סה״כ הנקודות האפשרי הוא 126.
לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	9	10	11	12	13	14	15
א							
ב							
ג							
ד							

	1	2	3	4	5	6	7	8
א								
ב								
ג								
ד								

	20	21
א		
ב		
ג		
ד		

	16	17	18	19
א				
ב				
ג				
ד				

סוגיה 1

יהי S_n מספר ההצלחות ב– n ניסויים בלתי תלויים, כל אחד בעל הסתברות p להצלחה, ויהי $q=1-p$.

---

1. $\dfrac{\mathbb{P}\left(S_n=k\right)}{\mathbb{P}\left(S_{n-1}=k-1\right)}$ שווה ל–

(א) $\dfrac{n-1}{p(k-1)}$ **(ב)** $q\dfrac{k}{n}$ **(ג)** $p\dfrac{n}{k}$

....

2. $\mathbb{P}\left(S_n=k\right)$ שווה ל–

(א) $q\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}=k-1\right)$

(ב) $p\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}=k\right)+q\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}=k-1\right)$

(ג) $\mathbb{P}\left(S_n\leq k\right)-\mathbb{P}\left(S_{n-1}\leq k\right)$

....

3. $\mathbb{P}\left(S_n\leq k\right)$ שווה ל–

(א) $p\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}\leq k\right)+q\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}\leq k-1\right)$

(ב) $q\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}\leq k-1\right)$

(ג) $p\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}\leq k-1\right)+q\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}\leq k\right)$

....

4. תוחלת מותנית $\mathbb{E}\left(S_n\,\middle|\,S_n\leq k\right)$ שווה ל–

(א) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} i\binom{n}{i}p^iq^{n-i}$

(ב) $\displaystyle\frac{1}{\mathbb{P}\left(S_n\leq k\right)}\sum_{i=0}^{k} i\binom{n}{i}p^iq^{n-i}$

(ג) $\displaystyle\mathbb{P}\left(S_n\leq k\right)\cdot\sum_{i=0}^{k} i\binom{n}{i}p^iq^{n-i}$

....

5. $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} i\binom{n}{i}p^iq^{n-i}$ שווה ל–

(א) $np\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}\leq k-1\right)$

(ב) $kp\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}\leq k-1\right)$

(ג) $nq\cdot\mathbb{P}\left(S_{n-1}\leq k-1\right)$

רמז: הזכר(י) בטריק שעוזר לחשב תוחלות להתפלגויות בינומיות ופואסון.

....

6. $\mathbb{E}(S_n)-\mathbb{E}\left(S_n\,\middle|\,S_n\leq k\right)$ שווה ל–

(א) $q(n-k)\cdot\mathbb{P}\left(S_n=k\,\middle|\,S_n\leq k\right)$

(ב) $pn\cdot\mathbb{P}\left(S_n=k\,\middle|\,S_n\leq k\right)$

ג) $p(n-k)\cdot\mathbb{P}\left(\,S_n=k\,\middle|\,S_n\le k\,\right)$

יהי $p=\frac{1}{2}$, $n=2k$.

---

7. $\mathbb{P}\left(\,S_{2k}=k\,\middle|\,S_{2k}\le k\,\right)$ שווה ל–

א) $\dfrac{\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}}$ ב) $\dfrac{\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}}$ ג) $\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k-1}}$

....

8. נסמן $a_k=\mathbb{E}(\,S_{2k}\,)-\mathbb{E}\left(\,S_{2k}\,\middle|\,S_{2k}\le k\,\right)$, אז

א) $a_k\sim\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}}$ עבור $k\to\infty$, כלומר, $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

ב) $\lim_{k\to\infty}a_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

ג) $a_k\sim\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}$ עבור $k\to\infty$, כלומר, $\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

סוגיה 2

קבוצה של 40 סטודנטים מכילה
- 10 מתמטיקאים משנה א׳,
- 10 מתמטיקאים משנה ב׳,
- 10 פיזיקאים משנה א׳,
- 10 פיזיקאים משנה ב׳.

מתוך הקבוצה דוגמים באקראי מדגם של 20 סטודנטים. נתבונן במאורעות
- A : במדגם יש מתמטיקאי (לפחות אחד),
- B : במדגם יש גם מתמטיקאי משנה א׳ (לפחות אחת), וגם מתמטיקאי משנה ב׳ (לפחות אחת).
- C : במדגם יש מתמטיקאי משנה א׳ (לפחות אחת),
- D : במדגם יש מתמטיקאי משנה ב׳ (לפחות אחת),

ובמשתנים מקריים
- X : מספר מתמטיקאים משנה א׳ במדגם,
- Y : מספר מתמטיקאים משנה ב׳ במדגם,
- U : מספר פיזיקאים משנה א׳ במדגם,
- V : מספר פיזיקאים משנה ב׳ במדגם.

9.

א) $C\cup D=A$.

ב) $C\cup D=B$

(ג) אם המדגם ללא החזרה אז $C \cup D = A$,
ואם המדגם עם החזרה אז $C \cup D \neq A$.

....

.10

(א) $C \cap D = A$.

(ב) $C \cap D = B$

(ג) אם המדגם ללא החזרה אז $C \cap D = B$,
ואם המדגם עם החזרה אז $C \cap D \neq B$.

....

.11

(א) $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_D$ (אינדיקטורים).

(ב) $B = \{X + Y > 0\}$, כלומר $B = \{\omega : X(\omega) + Y(\omega) > 0\}$.

(ג) אם המדגם ללא החזרה אז $A = \{X + Y > 0\}$.
ואם המדגם עם החזרה אז $A \neq \{X + Y > 0\}$.

....

.12

(א) מאורעות C, D בלתי תלויים.

(ב) מאורעות C, D תלויים.

(ג) אם המדגם ללא החזרה אז C, D תלויים,
ואם המדגם עם החזרה אז C, D בלתי תלויים.

....

.13

(א) מ"מ X, Y בלתי תלויים.

(ב) מ"מ X, Y תלויים.

(ג) אם המדגם ללא החזרה אז X, Y תלויים,
ואם המדגם עם החזרה אז X, Y בלתי תלויים.

....

.14

(א) מ"מ $X + Y, X + U$ בלתי תלויים.

(ב) מ"מ $X + Y, X + U$ תלויים.

(ג) אם המדגם ללא החזרה אז $X + Y, X + U$ תלויים,
ואם המדגם עם החזרה אז $X + Y, X + U$ בלתי תלויים.

....

.15 נניח שהמדגם הוא סדור, ללא החזרה. נסמן ב– n את מספר המדגמים המקיימים $X = 6$, $Y = 5$.

(א) n שווה למספר של כל הפונקציות $f : \{1, \dots, 20\} \to \{1, \dots, 40\}$ המקיימות $|f^{-1}(\{1, \dots, 10\})| = 6$, $|f^{-1}(\{11, \dots, 20\})| = 5$.

(ב) n שווה למספר הקבוצות $E \subset \{1, \dots, 40\}$ המקיימות $|E| = 20$, $|E \cap \{1, \dots, 10\}| = 6$, $|E \cap \{11, \dots, 20\}| = 5$.

ג) n שווה למספר החלוקות של הקבוצה $\{1,\ldots,20\}$ לשלושה חלקים R,S,T המקיימים $|R|=6$, $|S|=5$.

סוגיה 3

מוצר נבחר באקראי, נבדק ע"י שני מבקרים ומקבל ציונים X_1,X_2 . נניח ש- $X_1 = U+Z_1$ ו- $X_2 = U+Z_2$, כאשר U איכות המוצר, Z_1,Z_2 שגיאות המבקרים. נתון כי מ"מ U,Z_1,Z_2 הם בלתי תלויים, וכי מ"מ Z_1,Z_2 הם שווי התפלגות. יודעים מנתונים סטטיסטיים את סטיית התקן $\sigma = \sqrt{\mathbb{V}\left(X_2\right)} = \sqrt{\mathbb{V}\left(X_1\right)}$ ואת מקדם המתאם $R(X_1,X_2)=\rho$, אבל לא יודעים פרמטרים של מ"מ U,Z_1,Z_2 .
רמז: $\operatorname{Cov}\left(U+Z_1,U+Z_2\right)=\ldots$

---

16. סטיית התקן $\sqrt{\mathbb{V}\left(U\right)}$ של איכות המוצר שווה ל-

(א) $\sigma\sqrt{\rho}$ (ב) $\sigma\rho$ (ג) $\dfrac{\sigma}{\sqrt{\rho}}$

....

17. סטיית התקן $\sqrt{\mathbb{V}\left(Z_k\right)}$ של שגיאת המבקר שווה ל-

(א) $\dfrac{\sigma}{1-\rho}$ (ב) $\sigma(1-\rho)$ (ג) $\sigma\sqrt{1-\rho}$

....

18. מקדם המתאם $R(X_1,U)$ שווה ל-

(א) ρ . (ב) ρ^2 ; (ג) $\sqrt{\rho}$;

....

19. קירוב לינארי אופטימלי (כלומר, תחזית לינארית, או קו רגרסיה) של U באמצעות X_1 היא

(א) $\hat{U} = X_1 - \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(U)$;

(ב) $\hat{U} = \rho\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big) + \mathbb{E}(U)$;

(ג) $\hat{U} = \sqrt{\rho}\big(X_1 - \mathbb{E}(X_1)\big) + \mathbb{E}(U)$.

סוגיה 4

n בנות ו- m בנים יושבים סביב שולחן עגול בסדר מקרי. נגדיר מ"מ X כמספר הבנים שיושבים בין שתי בנות.

---

20. נניח ש- $n \ge 3$ ו- $m \ge 2$. תוחלת $\mathbb{E}(X)$ שווה ל-

(א) $m\left(\dfrac{n}{m+n}\right)^2$. (ב) $\dfrac{mn(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$. (ג) $\dfrac{mn(n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)}$.

....

21. נניח ש- $n=3$ ו- $m=2$. שונות $\mathbb{V}\left(X\right)$ שווה ל-

(א) $\dfrac{2}{3}$. (ב) $\dfrac{1}{2}$. (ג) $\dfrac{1}{3}$.

רשימת נוסחאות

ההתפלגות		$\mathbb{P}\left(X=k\right)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}\left(X\right)$
בינומית	$B(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
גיאומטרית המתחילה ב–0	$G(p)$	$p(1-p)^k$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
אחידה ב–$\{1,\ldots,n\}$	$U(n)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
בינומית–שלילית המתחילה ב–0	$NB(n,p)$	$\binom{k+n-1}{n-1}p^n(1-p)^k$	$n\frac{1-p}{p}$	$n\frac{1-p}{p^2}$
היפרגיאומטרית	$H(n;R,W)$	$\frac{\binom{R}{k}\binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$n\frac{R}{R+W}$	$n\frac{RW}{(R+W)^2}\left(1-\frac{n-1}{R+W-1}\right)$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (-1<x<1)$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots$$

$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right))$$

$$\mathbb{V}\left(Y\right)=\mathbb{E}(\mathbb{V}\left(Y\,\middle|\,X\right))+\mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left(Y\,\middle|\,X\right)\right)$$

$$\hat{Y}=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mathbb{E}(X))+\mathbb{E}(Y)$$