פתרון מקוצר לבחינה של פרופ' רון פלד מ 04/08/16

חלק א

סעיף א

בכל אחד מהימים נקנית חולצה בסיכוי 0.5 ונקנה בגד אחר בסיכוי 0.5 .
יש אי תלות בין ימים שונים.

$$P\left(X_{2k}=Y_{2k}+Z_{2k}\right)=\binom{2k}{k}0.5^k\cdot 0.5^k$$

סעיף ב

$$E\left(X_n-Y_n\right)=E\left(X_n\right)-E\left(Y_n\right)=\frac{1}{2}n-\frac{1}{3}n=\frac{1}{6}n$$

X_n-Y_n הוא סכום של n משתנים ב"ת שכל אחד מהם מקבל את הערך 1 בסיכוי $\frac{1}{2}$, את

הערך -1 בסיכוי $\frac{1}{3}$ ואת הערך 0 בסיכוי $\frac{1}{6}$.

השונות של כל אחד מהם היא

$$\left[\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{3}(-1)^2+\frac{1}{6}\cdot 0^2\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{6}\cdot 0\right]^2=\frac{29}{36}$$

שונות הסכום היא $\frac{29}{36}n$.

סעיף ג

לפי החוק החלש כאשר $n\to\infty$ ההסתברות שיתקיים $\left(X_n\le 0.4n\right)$ שואפת לאפס וההסתברות שיתקיים $\left(Y_n\ge 0.4n\right)$ גם שואפת לאפס. כדי שיתקיים $\left(X_n\le Y_n\right)$ צריך שיתקיים לפחות אחד מבין $\left(X_n\le 0.4n\right)$ או $\left(Y_n\ge 0.4n\right)$. לכן ההסתברות לכך שואפת לאפס.

הערות

הקבוע 0.4 נבחר שרירותית מבין הקבועים שבקטע $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

ניתן היה לפתור גם באמצעות אי שיוויון צ'בישב.

סעיף ד

$2X_{450}+Y_{450}-2Z_{450}$ הוא סכום של 450 משתנים ב"ת שמקבלים כל אחד את הערך 2 בסיכוי $\frac{1}{2}$, את הערך 1 בסיכוי $\frac{1}{3}$ ואת הערך -2 בסיכוי $\frac{1}{6}$. על סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות בעלי שונות סופית חל משפט הגבול המרכזי.

תוחלת כל משתנה היא $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 1-\frac{1}{6}\cdot 2=1$.

שונות כל משתנה היא $2 = \left[\frac{1}{2}\cdot 2^2+\frac{1}{3}\cdot 1^2+\frac{1}{6}\cdot(-2)^2\right]-1^2$.

מתקיים

$$P(2X_{450}+Y_{450}-2Z_{450}\geq 500)=P\left(\frac{2X_{450}+Y_{450}-2Z_{450}}{450}\geq\frac{500}{450}\right)\cong$$

$$\cong 1-\phi\left(\frac{\frac{500}{450}-1}{\sqrt{\frac{2}{450}}}\right)\cong 0.05$$

<u>חלק ב</u>

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ב	ב	ד	א	א	ג	א	ב	ג	א	ג	ב

<u>הסברים קצרים</u>

<u>שאלה 1</u>

לפי התכונות של משתנה פואסוני מפוצל, שלושת המשתנים X,Y,Z הם ב"ת ומתקיים $E(Y)=120\cdot\frac{1}{3}=40$. מתקיים $E(Y\mid X=30)=E(Y)=40$.

<u>שאלה 2</u>

כאמור X,Y,Z הם ב"ת.

$$V(X-Y+Z)=V(X)+V(-Y)+V(Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)=V(X+Y+Z)=120$$

<u>שאלה 3</u>

כל אחד שניגש לבנקאי או ליועץ, ניגש לבנקאי בסיכוי $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}$. לכן בהינתן $(X+Y=100)$, X מתפלג $Bin\left(100,\frac{3}{5}\right)$ ושונותו היא $100\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}=24$.

<u>שאלה 4</u>

X הוא זוגי בסיכוי $0.5\cdot 0.5+0.5\cdot 0.5^3+0.5\cdot 0.5^5+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$. Y הוא זוגי באותו סיכוי.

כדי שהמכפלה תהיה זוגית, צריך לפחות אחד מהם להיות זוגי. הסיכוי לכך הוא

$$1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{9}$$

<u>שאלה 5</u>

עבור כל מספר של הטלות הסיכוי ש $(H>T)$ שווה לסיכוי ש $(T>H)$. אם Y אי זוגי, אז לא יתכן שיתקיים $(T=H)$. לכן בהינתן מקרים אלה הסיכוי שיתקיים $(H>T)$ הוא $\frac{1}{2}$.

הסיכוי ש Y אי זוגי הוא $\frac{2}{3}$. גם במקרים ש Y זוגי יש הסתברות חיובית לכך ש $(H>T)$.

<u>שאלה 6</u>

מדובר על תוחלת סכום של XY אינדיקטורים בעלי הסתברות 0.5 . בגלל האי תלות ובגלל שתוחלת של משתנה גיאומטרי שווה לאחד חלקי הפרמטר שלו, מתקיים

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{1/2}\cdot\frac{1}{1/2}=4$$

לפי תוחלת שלמה, תוחלת הסכום היא $4\cdot\frac{1}{2}=2$.

<u>שאלה 7</u>

$$Cov(H,XY)=E(HXY)-E(H)E(XY)$$
$$E(H\mid XY=k)=0.5k$$
$$E(HXY)=E\left(0.5X^2Y^2\right)=0.5E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)=$$
$$=0.5\left[\left(\frac{1}{1/2}\right)^2+\frac{0.5}{0.5^2}\right]\left[\left(\frac{1}{1/2}\right)^2+\frac{0.5}{0.5^2}\right]=18$$

(השתמשנו בכך ש $V(X)=\frac{0.5}{0.5^2}$ וש $E\left(X^2\right)=V(X)+E^2(X)$).

<u>שאלה 8</u>

לפני שנופלת הכרעה למי נגיע קודם, יש שני סוגים של מצבים שבהם ניתן להיות.

אם נמצאים במרכז אז הסיכוי הוא a. יש 4 צמתים אחרים שבכל אחד מהם הסיכוי הוא b.

מתקיים

$$\begin{cases} a=\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{4}{5}b \\ b=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}a \end{cases}$$

<u>שאלה 9</u>

יש שאיפה להסתברות הסטציונרית של המצב. זהו הילוך מקרי פשוט על גרף שבו ההסתברות הסטציונרית של מצב שווה לדרגתו חלקי סכום הדרגות בגרף.

<u>שאלה 10</u>

ההילוך מתואר על-ידי שרשרת מרקוב סופית מחזורית. לכן אין הסתברות גבולית.

<u>שאלה 11</u>

כעת ניתן לחזור למרכז ב 2 צעדים וגם ב 3 צעדים, לכן כעת המצבים אינם מחזוריים.

עוברים על הצלע בסיכוי $\frac{1}{4}$ אם נמצאים בצרכניה ובסיכוי $\frac{1}{6}$ אם נמצאים במרכז הכפר.

סכום הדרגות הוא כעת 20. לצרכניה יש הסתברות סטציונרית $\frac{4}{20}$ ולמרכז הכפר $\frac{6}{20}$.

לכן ההסתברות הגבולית היא $\frac{4}{20}\cdot\frac{1}{4}+\frac{6}{20}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$.

<u>הערה</u>

בהילוך מקרי פשוט לכל קשת יש אותה הסתברות גבולית.

<u>שאלה 12</u>

הגרלה (קומבינציה) בין שתי התפלגויות סטציונריות, היא גם התפלגות סטציונרית.
לכן גם כאן מתחילים בהתפלגות סטציונרית. התפלגות סטציונרית היא נקודת שבת.
לכן ההסתברויות להיות במצב מסוים הן קבועות.

שלומי