פתרון מקוצר לבחינה מ 28/03/14

שאלה 1

א.
$$P(Y=3 \mid X=1)=\frac{0.2}{0.1+0.2} \quad , \quad P(Y=0 \mid X=1)=\frac{0.1}{0.1+0.2}$$

ב.
$$P(X=1, X+Y=1+3)=0.2 \qquad P(X=1, X+Y=1+0)=0.1$$
$$P(X=2, X+Y=2+3)=0.4 \qquad P(X=2, X+Y=2+2)=0.3$$

שאלה 2

א. כן. אם מתקיים ש Y הוא העתק של X, אז אם $(X=2)$, אז גם בהכרח $(Y=2)$ ו $(X+Y=2+2)$ וזה קורה בסיכוי $0.5^2=0.25$.

ב. נראה תחילה שאם לא נתון שלכל זוג משתנים יש אותה התפלגות משותפת, אז התשובה היא כן. נניח שמתקיים $X \sim Bin(2,0.5)$ והמשתנה Y מוגדר כ $Y=2-X$.
במקרה זה Y סופר את מספר הכשלונות בשני נסיונות ב"ת שכל אחד מהם הוא כשלון בסיכוי 0.5. כך $Y \sim Bin(2,0.5)$ ומתקיים $P(X+Y=2)=1$ והסכום הוא משתנה מנוון וככזה יש לו שונות 0.
אבל, כאן נתון שלכל זוג משתנים יש אותה התפלגות משותפת.
כדי ששונות הסכום של X ו Y תהיה שווה לאפס, אז צריך להתקיים ש $X+Y$ הוא קבוע. אבל מכיוון שלכל זוג יש אותה התפלגות משותפת, אז צריך להתקיים ש $X+Z$, גם יהיה תמיד שווה לאותו קבוע. לכן בהסתברות 1 מתקיים $Y=Z$. אבל אז שונות הסכום $Y+Z$ אינה שווה לאפס. אבל מכיון שלכל זוג משתנים יש אותה התפלגות משותפת, צריך להתקיים $V(Y+Z)=V(X+Y)$ וקיבלנו סתירה.

ג. אם המשתנים הם ב"ת, אז הם בלתי מתואמים ומתקים
$$V(X-Y-Z-W)=V(X)+V(-Y)+V(-Z)+V(-W)=$$
$$=V(X)+V(Y)+V(Z)+V(W)=4\cdot 2\cdot 0.5\cdot 0.5$$
נראה שדי בהנחה שנתונה בראש השאלה שלכל זוג משתנים יש אותה התפלגות משותפת, כדי שתתקבל אותה שונות.
$$V(X-Y-Z-W)=V(X)+V(Y)+V(Z)+V(W)-2Cov(X,Y)-2Cov(X,Z)$$
$$-2Cov(X,W)+2Cov(Y,Z)+2Cov(Y,W)+2Cov(Z,W)$$
מכיון שלכל זוג משתנים יש את אותה התפלגות משותפת, אז ה Cov בין כל זוג משתנים הוא בעל אותו ערך. כאן בסכום השונויות המשותפות יש מספר שווה של הנסכמים בסימן פלוס ושל הנסכמים עם סימן מינוס. לכן סכום השונויות המשותפות הוא אפס.

<u>שאלה 3</u>

<u>א</u>. $Bin\left(5,\frac{3}{6}\right)$ (בכל אחת מההטלות הבלתי תלויות מתקבל זוגי בסיכוי $\frac{3}{6}$).

<u>ב</u>. בכל הטלה מתקבלת תוצאה 5 בסיכוי $\frac{1}{6}$ באופן ב"ת בהטלות האחרות. לכן זמן הצפיה לתוצאה 5, מתפלג $G\left(\frac{1}{6}\right)$ והוא בעל תוחלת של 6.

<u>ג</u>. מבצעים הטלה ולאחריה מחכים זמן המתפלג $G\left(\frac{1}{6}\right)$ עד שהתוצאה שלה תחזור.

לכן התוחלת היא 1 ועוד תוחלת של משתנה $G\left(\frac{1}{6}\right)$. לכן התוחלת היא 7.

<u>ד</u>. בהינתן שבהטלה הראשונה קבלנו 2, ההטלה הראשונה היא משתנה מנוון בעל תוחלת 2. לכל אחת מיתר ההטלות יש תוחלת $\frac{1+6}{2}=3.5$.

לכן התוחלת המותנה היא $2+4\cdot 3.5$.

<u>ה</u>. תוך לכל היותר 3 הטלות חייבים לקבל סכום מצטבר גדול מ 2.

אם"ם בהטלה הראשונה נקבל תוצאה גדולה מ 2, אז יתקבל $(W=1)$. לכן מתקיים $P(W=1)=\frac{4}{6}$. כדי שיתקבל $(W=3)$, צריך לקבל בשתי ההטלות הראשונות תוצאה של 1. לכן, $P(W=3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. מתקיים $P(W=2)=1-P(W=1)-P(W=3)$ ו $E(W)=P(W=1)\cdot 1+P(W=2)\cdot 2+P(W=3)\cdot 3$.

<u>ו</u>. יהיו X_i תוצאת ההטלה ה- i.

מתקיים למשל $P(W=1\mid X_1=5)=1\neq P(W=1)$ ולכן W תלוי ב X_1 .

מתקיים למשל $P(W<3\mid X_2=5)=1\neq P(W<3)$ ולכן W תלוי ב X_2 .

אם מגיעים להטלה 3 מבלי שלפני זה התקבל סכום מצטבר גדול מ 2, אז בכל מקרה מתקבל $(W=3)$. לכן אין תלות בין W למשתנים X_i עבור $i\geq 3$.

שלומי