

קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.
אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון למבחן מ 26.01.21

שאלה 1

- א.** הוא לא בעל התפלגות אחידה.
משתנה אחד מקבל את כל אחד מהערכים האפשריים בסיכוי שווה. המשתנה T מקבל את הערך 2 רק אם שני המשתנים X, Y מקבלים כל אחד את הערך 1. הוא מקבל ערכים אחרים בצירופים שונים של X, Y .
- הערה
לא מספיק להגיד שטווח הערכים של המשתנה שונה מטווח הערכים של המשתנים המקוריים.
- ב.** מתפלג $Bin(3, 0.1)$.
גם בהינתן שמשנתנים מסויימים שווים או לא שווים למשתנה X , המשתנה X מקבל את כל אחד מערכים שבין 1 ל 10 בסיכוי שווה. לכן הסיכוי של כל משתנה להיות שווה ל X הוא 0.1 באופן ב"ת בכך אם משנתנים אחרים שווים ל X .
התוחלת היא $3 \cdot 0.45 = 1.35$.
- ג.** כל משתנה אחר מקבל ערך שווה לערכו של X בסיכוי 0.1. לכן משיקולי סימטריה הוא מקבל ערך גדול מערכו של X בסיכוי $\frac{1-0.1}{2}$. תוחלת סכום האינדיקטורים לכך שמשנתנים מקבלים ערך גדול מ X שווה לסכום התוחלות שלהם. התוחלת של אינדיקטור שווה להסתברות שלו לקבל את הערך 1.
- הערה
מספר המשתנים שמקבלים ערך גדול מ X לא מתפלג בינומית. יש תלות בין המאורעות שמשנתנים מסויימים מקבלים ערך גדול מ X . אם משתנה מקבל ערך גדול מ X , זה מגדיל את הסיכוי ש X קיבל ערך קטן.
- ד.** הסיכוי המותנה נשאר 0.45.
המשתנה X מקבל את כל אחד מהערכים שבין 1 ל 10 בסיכוי שווה, גם אם ידוע שמשנתנה אחר שווה לו ($P(X = i | X = Y) = \frac{P(X=Y=i)}{P(X=Y)} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1$).
לכן הסיכוי ש Z גדול ממנו נשאר $\frac{1-0.1}{2}$.
- ה.** הסיכוי הוא $\frac{\binom{10}{4}}{10^4}$.
כדי שיתקיים סדר זה, צריך לבחור ארבעה מספרים שונים. לאחר שבחרים ארבעה מספרים שונים, יש דרך אחת לסדר אותם כך שיתקיים הסדר הנדרש.
- הערות
כדי שיתקיים הסדר הזה שבו יש אי שיוויונות חזקים, צריך שכל ארבעת הערכים המתקבלים יהיו שונים. אם ידוע כבר שהם שונים, אז הסתברות המאורע היא $\frac{1}{4!}$.
אבל לא ידוע מראש שהם שונים.
המאורעות שמשנתנים שונים מקבלים ערכים קטנים מאחרים הם תלויים, לכן אין להכפיל הסתברויות של מאורעות כאלה.

שאלה 2

א. הסיכוי הוא חצי.

האינדיקטור הראשון הוא בעל סיכוי חצי להצלחה. עבור כל סכום שמקבלים האחרים, הוא משלים אותם לסכום זוגי בסיכוי חצי.

יהי G המאורע שהראשון מקבל את הערך 1.

יהי E המאורע שסכום האחרים הוא אי זוגי.

מבוקש $P(G^c \cap E^c)P(G \cap E)$. בהסתמך על האי תלות זה שווה ל

$P(G)P(E) + P(G^c)P(E^c)$. בהסתמך על כך שאינדיקטור הראשון הוא הוגן זה

שווה ל $0.5P(E) + 0.5P(E^c) = 0.5[P(E) + P(E^c)] = 0.5$.

ב. ההסתברות היא בקירוב 1.

כדי להגיע למסקנה זו, לא צריך לדעת מהו מספר ראשוני. צריך רק לזכור שחיתוך של

קבוצה עם קבוצה אחרת מוכל בקבוצה. יש בקבוצת השלמים שגדולים מ 10000

וקטנים מ 10099 לא יותר מ 100 אינדיקטורים, ולכן בודאי אין בקבוצה יותר מ 100

אינדיקטורים בעלי מספור ראשוני. כל אחד מהאינדיקטורים שבקבוצה מקבל ערך

שונה מאפס בסיכוי קטן מ 10^{-4} . מכיון שהסתברות איחוד אף פעם לא גדולה מסכום

ההסתברויות של המאורעות, אז ההסתברות שיש אינדיקטור שמקבל ערך שונה

מאפס קטנה מ

$$0.01 = 100 \cdot 10^{-4}.$$

הערות

אפשר גם לפתור לפי אי שיוויון מרקוב. תוחלת סכום האינדיקטורים שבקבוצה קטן מ

$$0.01 = 100 \cdot \frac{1}{10000}.$$

לכן ההסתברות שסכום האינדיקטורים גדול או שווה ל 1 אינו

גדול מ 0.01. לכן ההסתברות שמתקבל ערך 0 היא לפחות 0.99.

בניגוד לסעיף א', כאן אין אף אינדיקטור בעל הסתברות חצי. לכן אי אפשר לטעון

שהסיכוי הוא חצי.

ג. מבוקשת תוחלת ששווה לתוחלת המכפלה של $(-1)^{X_k}$ עבור ערכי k שהן בקבוצה.

כל חזקה כזאת מקבלת את הערך 1 אם X_k הוא 0 ומקבלת את -1 אם X_k מקבל את

הערך 1. מכיון שהמשתנים X_k הם ב"ת, אז תוחלת המכפלה שווה למכפלת

התוחלות. מתקיים

$$E(-1)^{X_k} = P(X_k = 0) \cdot 1 + P(X_k = 1) \cdot (-1) = \frac{k}{k+1} - \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{k+1}$$

מכפלת התוחלות היא

$$\frac{101}{103} \cdot \frac{103}{105} \cdot \frac{105}{107} \cdots \frac{195}{197} \cdot \frac{197}{199}$$

כמעט כל האיברים מצטמצמים ומקבלים שהמכפלה היא $\frac{101}{199}$.

ד. אם מספר ההצלחות הוא זוגי אז $(-1)^{\sum_{k \in B} X_k}$ שווה ל 1, ואם מספר ההצלחות הוא

אי זוגי אז $(-1)^{\sum_{k \in B} X_k}$ הוא -1. יהי a ההסתברות שמספר ההצלחות הוא זוגי.

$$\frac{101}{199} = (-1) + (1-a)(-1) = a \cdot 1 + (1-a)(-1).$$

לכן מתקיים $2a - 1 = \frac{101}{199}$. לכן $a = \frac{\frac{101}{199} + 1}{2}$.

הערה

בניגוד לסעיף א', כאן אין אף אינדיקטור בעל הסתברות חצי. לכן אי אפשר לטעון

שהסיכוי הוא חצי.

שאלה 3

א. לא קיים ערך a כזה.
עבור כל $a > 0$ מתקיים

$$\begin{aligned} P(a < X < a + 1) &= P(X < a + 1) - P(X < a) = \\ &= [1 - e^{-(a+1)}] - [1 - e^{-a}] = e^{-a} - e^{-(a+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(a + 1 < X < a + 2) &= P(X < a + 2) - P(X < a + 1) = \\ &= [1 - e^{-(a+2)}] - [1 - e^{-(a+1)}] = e^{-(a+1)} - e^{-(a+2)} \\ &= e^{-1} [e^{-a} - e^{-(a+1)}] = e^{-1} P(a < X < a + 1) \end{aligned}$$

מתקיים $e^{-1} < 1$.

הערות

$1 - e^{-x}$ היא פונקציית ההסתברות המצטברת. היא לא יכולה להיות פונקציית צפיפות כי האינטגרל עליה עד אין סוף הוא אין סוף. האינטגרל על פונקציית צפיפות ממינוס אין סוף עד אין סוף הוא תמיד שווה ל 1. כאשר ערכי קצוות הקטע שואפים לאינסוף, אז ההסתברות לקבל ערך בקטע שואפת לאפס. אבל היא עדיין חיובית בכל קטע. ניתן גם למצוא את ההסתברות לקבלת ערך בקטע מסוים על-ידי אינטגרציה על פונקציית הצפיפות. אבל אם נתונה פונקציית ההסתברות המצטברת, אז מיותר כאן למצוא את הצפיפות ולעשות אינטגרציה. פונקציית צפיפות של המשתנה היא e^{-x} עבור כל $x \geq 0$ שהיא חיובית עבור כל ערך חיובי והיא מונוטונית יורדת עבור כל ערך $x \geq 0$.

ב.

ההסתברות היא בדיוק אפס. בגלל שפונקציית ההסתברות המצטברת היא רציפה, אז כל שלם (כמו כל מספר ממשי מסוים) מתקבל בהסתברות אפס. המאורע שמתקבל איזשהו ערך שלם הוא איחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס. לכן יש לו הסתברות אפס.

הערות

תשובה צריכה להכיל שני דברים: בהתפלגות רציפה לכל נקודה יש הסתברות אפס וגם שמדובר באיחוד בן מניה של מאורעות בעלי הסתברות אפס. לא מספיק לטעון שההסתברות לקבל ערך שלם מסוים היא אפס. למדנו בתחילת הסמסטר שלאיחוד בן מניה של מאורעות זרים, יש הסתברות ששווה לסכום ההסתברויות של המאורעות. המאורע שהתקבל ערך שלם איננו מאורע ריק. זו דוגמא למאורע שאינו ריק שיש לו הסתברות אפס. בהתפלגות רציפה, גודל הקפיצה של פונקציית ההסתברות המצטברת בנקודה הוא קטן מכל קבוע חיובי ולכן שווה לאפס.