

בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

יש להגיש את הבחינה באתר המודל עד שעה 11:50 בצהריים.
מותר לכל תלמיד להשתמש בשני דפי A4 הכתובים משני הצדדים.
אסור להשתמש במחשבי כיס.
בבחינה יש 3 שאלות. ענו על כל השאלות.
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

שאלה 1 (50 נקודות)

יהיו X, Y, Z, W משתנים מקריים ב"ת ושווי התפלגות. נניח ש $X \sim U[1, 10]$.
זאת אומרת שלכל אחד מארבעת המשתנים המקריים יש התפלגות אחידה
בדידה בין 1 ל 10.
יהי T משתנה מקרי המקיים $T = X + Y$.

- א. האם T הוא משתנה מקרי בעל התפלגות אחידה?
ב. איך מתפלג מספר המשתנים מבין Y, Z, W שמקבלים ערך שווה לערך ש X מקבל?
ג. מהי תוחלת מספר המשתנים מבין Y, Z, W שמקבלים ערך גדול מהערך ש X מקבל?
ד. מהו $P(Z > X | X = Y)$? (הכוונה היא להסתברות מותנה).
ה. מהו $P(X < Y < Z < W)$?
-

שאלה 2 (40 נקודות)

יהיו $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10098}, X_{10099}$ עשרת אלפים ותשעים ותשעה משתנים מקריים אינדיקטורים ב"ת שאינם שווי התפלגות. מתקיים $P(X_k = 1) = \frac{1}{k+1} = 1 - P(X_k = 0)$ עבור כל $1 \leq k \leq 10099$. יהי $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ עבור כל $1 \leq n \leq 10099$. תהי A קבוצת המספרים הראשוניים שגדולים מ 10000 אך קטנים מ 10100. תהי B קבוצת המספרים הזוגיים שגדולים מ 100 אך קטנים מ 200.

- א.** מהי ההסתברות ש S_{100} יהיה זוגי ?
ב. מהי בקירוב ההסתברות ש $\sum_{k \in A} X_k$ יהיה זוגי ?
(הסכום $\sum_{k \in A} X_k$ הוא סכום האינדיקטורים X_k על ערכי k שהם ראשוניים שגדולים מ 10000 אך קטנים מ 10100).
יש לתת תשובה מקורבת שלא סוטה מהתשובה המדויקת ביותר מ 0.01 .

רמז

- כדי לפתור את הסעיף הזה לא צריך לדעת מהו מספר ראשוני.
ג. מהו $E((-1)^{\sum_{k \in B} X_k})$?
(הסכום $\sum_{k \in B} X_k$ הוא סכום האינדיקטורים X_k על ערכי k שהם זוגיים שגדולים מ 100 אך קטנים מ 200).
ד. הסבירו איך בהסתמך על התשובה של סעיף ג', ניתן למצוא את ההסתברות ש $\sum_{k \in B} X_k$ הוא זוגי ?
הערה
גם אם לא הצלחתם לפתור את סעיף ג', ניתן לפתור את סעיף ד' על-ידי מתן תשובה שהיא פונקציה של התשובה של סעיף ג'.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי X משתנה מקרי המקיים $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ עבור כל $0 \leq x < \infty$.

- א.** האם קיים $a > 0$ ממשי כך ש $P(a < X < a + 1) = P(a + 1 < X < a + 2)$?
ב. מהי ההסתברות ש X מקבל איזשהו ערך שלם ?
האם תשובתכם היא מדויקת או מקורבת ?