פתרון לבחינה מ 21/04/17

שאלה 1

א. מספר תוצאות ה"עץ" ב 5 הטלות ב"ת מתפלג $Bin(5,0.5)$.
לכן השונות היא $5\cdot 0.5\cdot 0.5$.

ב. צריך שבכל ההטלות האי זוגיות יתקבל "עץ" ובכל הזוגיות יתקבל "פלי" או שבכל האי זוגיות יתקבל "פלי" ובכל הזוגיות יתקבל "עץ". ההסתברות לכך היא $2\cdot 0.5^{10}$.

ג. יהי X אינדיקטור לקבלת רצף של עצים בין המקומות 1 ו 9.
יהי Y אינדיקטור לקבלת רצף של עצים בין המקומות 2 ו 10.
מספר רצפי ה"עץ" באורך 9 שווה ל $X+Y$.
מתקיים $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$.
מתקיים $V(X)=V(Y)=0.5^9\left(1-0.5^9\right)$.
מתקיים

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=P(X=1,Y=1)-P(X=1)P(Y=1)=$$
$$=0.5^{10}-0.5^9\cdot 0.5^9$$

פתרון בדרך שניה

יהי Z - מספר הרצפים באורך 9. המשתנה Z יכול לקבל את הערכים 0,1,2.
מתקיים $P(Z=2)=0.5^{10}$ (כדי שיהיה רצף בין מקומות 1 ו 9 וגם בין מקומות 2 ו 10, צריך שבכל הפעמים נקבל "עץ").
מתקיים $P(Z=1)=0.5\cdot 0.5^9+0.5^9\cdot 0.5$ (או שבהטלה הראשונה מקבלים "פלי" ובכל האחרות "עץ" או שבתשע הראשונות מקבלים "עץ" ובעשירית מקבלים "פלי").
מתקיים $P(Z=0)=1-P(Z=1)-P(Z=2)$.
מתקיים $V(Z)=E(Z^2)-E^2(Z)$ כאשר

$$E(Z)=P(Z=0)\cdot 0+P(Z=1)\cdot 1+P(Z=2)\cdot 2$$
$$E(Z^2)=P(Z=0)\cdot 0^2+P(Z=1)\cdot 1^2+P(Z=2)\cdot 2^2$$

ד. יש 6 מקומות שבהם יכול להתחיל רצף באורך 5. כל אחד מהם הוא הצלחה בסיכוי $0.5^5=\frac{1}{32}$. לכן תוחלת מספר הרצפים המתאימים היא $\frac{6}{32}$. מספר הרצפים הוא משתנה שמקבל רק ערכים אי שליליים. לפי אי שיוויון מרקוב ההסתברות שיהיה לפחות רצף אחד אינה גדולה מ $\frac{6}{32}$

(אם W הוא מספר הרצפים, אז מתקיים $P(W\ge 1)\le\frac{E(W)}{1}=\frac{6}{32}$).

שאלה 2

א. צריך שבפעם הראשונה שתתקבל תוצאה של 2 או 3 או 4 או 6, זאת תהיה תוצאה של 2 או 4.הסיכוי לכך הוא $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.
נראה זאת גם בדרך נוספת.
יהי a - ההסתברות המבוקשת.
אם בהטלה הראשונה נקבל 2 או 4 אז המאורע יתרחש. אם בהטלה הראשונה נקבל 3 או 6 אז בודאות המאורע לא יתרחש. אם בהטלה הראשונה נקבל 1 או 5 אז הכל תלוי

בהמשך וחוזרים לסיכוי המקורי. לכן מתקיים $a=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}a$.

ב. החל מכל שלב ההסתברות לקבל 4 לפני 5 שווה ל 0.5 וזאת באופן ב"ת בעבר.
צריך שיהיו 2 כשלונות ואחר כך הצלחה. הסיכוי הוא $(1-0.5)^2\cdot 0.5$.

שאלה 3

א. מספר ההטלות שלאחר ההטלה הראשונה מתפלג $U[1,6]$.
לכן תוחלת מספר ההטלות כולל ההטלה הראשונה היא $1+\frac{1+6}{2}$.

ב. הסיכוי הוא $\frac{1}{3}$.
אם סכום התוצאות של כל ההטלות חוץ מהאחרונה הוא כפולה של 3, אז באחרונה צריך לקבל תוצאה של 3 או של 6.
אם סכום התוצאות של כל ההטלות חוץ מהאחרונה הוא כפולה של 3 עם שארית 1, אז באחרונה צריך לקבל תוצאה של 2 או של 5.
אם סכום התוצאות של כל ההטלות חוץ מהאחרונה הוא כפולה של 3 עם שארית 2, אז באחרונה צריך לקבל תוצאה של 1 או של 4.
בכל אחד מהמקרים התנאי מתקיים בהסתברות $\frac{1}{3}$. לכן ההסתברות השלמה היא $\frac{1}{3}$.

ג. התשובה היא $\frac{5}{36}$.
אם בהטלה הראשונה מקבלים תוצאה של 1, אז ההטלה הראשונה היא גם ההטלה הלפני אחרונה. לכן במקרה זה ההטלה הלפני אחרונה אינה שווה ל 2.
אם בהטלה הלפני אחרונה מקבלים תוצאה שונה מ 1, אז יהיו עוד לפחות שתי הטלות, ובהטלה הלפני אחרונה הסיכוי לקבל תוצאה של 2 היא $\frac{1}{6}$.
לכן ההסתברות המבוקשת היא $\frac{1}{6}\cdot 0+\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$.

שאלה 4

א. מתקיים $P\left(0<\frac{S_n}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=P\left(\frac{S_n}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-P\left(\frac{S_n}{n}\le 0\right)$.

מתקיים $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, כאשר לכל $1\le i<\infty$ מתקיים $P(X_i=1)=P(X_i=-1)=0.5$.
סדרת המשתנים $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות ובעלי שונות סופית.
מתקיים $E(X_1)=0$, $V(X_1)=1$.
עבור כל c ממשי מתקיים שעבור ערכי n גדולים $P\left(\frac{S_n}{n}\le c\right)$ שווה בקירוב ל

$\phi\left(c\sqrt{n}\right) = \phi\left(\frac{c-0}{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}}\right)$. אם נציב עבור כל n: $c = \frac{1}{\sqrt{n}}$, נקבל שהגבול הוא $\phi(1)$. לכן $b=1$ מתאים.

לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים $\phi(0) = \phi\left(\frac{0-0}{\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \le 0\right)$.

<u>הערה</u>
מתקיים $\phi(0) = 0.5$.

<u>ב</u>. קיים a כזה והוא שווה ל -1.
מכיון שפונקצית הצפיפות של משתנה נורמלי סטנדרטי היא סימטרית סביב 0, אז ההסתברות של הקטע שבין -1 ל 0 שווה להסתברות של הקטע שבין 0 ל 1.
.

שלומי